





EUCLIDIS ELEMENTORUM
LIBRI VI. PRIORES PLANORUM, AC XI. ET XII. SOLIDORUM,

Cum Explicationibus, & Demonstrationibus

CHRISTOPHORI CLAVII.

In usum Auditorum suorum adornati & editi;

A

JOANNE HENRICO VAN LOM.
Philos. Doctore, ejusdemque Facultatis, ut & Mathes. Professore Ordinario.

Qui brevem Narrationem Historicam, de vita, ac Elementis Euclidis, addidit.

Adjectis tabulis æneis nitidioribus & accurationibus.



AMSTELODAMI,
Apud HENRICUM VIEROOT,
MDCCXXXVIII.



ILLUSTRISSIMIS, NOBILISSIMIS,

GENEROSISSIMIS

VIRIS,

ACADEMIÆ

DUCATUS GELRIÆ, ET COMITATUS ZUTPHANIÆ,

CURATORIBUS.

D. ADRIANO COMITI DE LYNDEN, Domino in Nederhemert, Burg-gravio Neomagensis Imperii; Satrapæ Regionis Cuikensis; &c. Ad consessum potentissimorum ordinum Foederati Belgii delegato. &c. &c. &c.

D. LEONARDO ESSENIO, Medicinæ Doctori; Civitatis Bommeliensis Consuli; ad reditus publicos Tetrarchiæ Neomagensis curandos, ac quondam ad Collegium Ordinum Generalium septem unitarum Regionum Delegato. &c. &c. &c.

D. FRANCISCO JOANNI BARONI DE HEKEREN, Domino de Enghuysen; Civitatis Dodechemi Consuli; urbis atque agri Does-urgensis Judici; Ducatus Gelriæ quæstori supremo; & ad concilium ordinum foederatorum, quod est Hagæ comitum, Delegato. &c. &c. &c.

D. EVERH. JOANNI BENJAMINI BARONI DE GOLSTEIN.
Domino in Appel; Ordinis Teutonici Magistro; Civitatis Zutphaniensis consuli; cameræ rationum, ducatus Gelriæ, & comitatus Zutphaniæ præsidi. &c. &c. &c.

D. ALEXANDRO BARONI DE DEDEM;
Domino in Vosbergen, & Werfhorst, Arnhemiæ, & oræ Velavicæ judici; Præfecturæ Dornspyckensis ex Equestri Ordine Præsidi; consessus Præpotentium Procerum, qui reditus publicos Tetrarchiæ Velavicæ curant, Præsidi; Gymnasii Velavici Curatori. &c. &c. &c.

D. ANTONIO à WESTERVELT,
Domino in Essenburg; Civitatis Harderovicenæ Consuli; ad collegium Ordinum Generalium, septem unitarum Regionum, & Cameram Tributorum Velaviæ quondam Delegato; Gymnasii Velavici Curatori. &c. &c. &c.

NEC NON

VIRO AMPLISSIMO, NOBILISSIMO, CONSULTISSIMO.

D. SAMUELI ESSENIO,
J. U. Doctori, Curiæ Ducatus Gelriæ, & Comitatus Zutphaniæ, Senatori extraordinario; Publicorum Redituum Maeslandiæ, & Oosterwyck quæstori; & Curatoribus Gelro-Zutphanicæ Academicæ à secretis &c. &c. &c.

S. P. D.
JOANNES HENRICUS VAN LOM.

DEDICATIO.

DUm novam Euclidis Elementorum, cum Christophori Clavii, præclari sane Mathematici, Demonstrationibus adornatam Editionem; privatis nostris Institutionibus destinatam, in lucem produco publicam: Vestro illustri Nomini, VIRI NOBILISSIMI ET AMPLISSIMI! consecrare eam, ac dicare meum esse officium censui. Justissimæ enim mihi causæ sunt variæ, quibus hoc opuscu-

lum vestris illustribus inscribere nominibus, me obstrictum esse sentio. Etenim si mecum reputo, Vos Academiæ nostræ curandæ præpositos esse, eique augendæ & amplificandæ egregiam & maxime laudabilem operam navare; nemini majori jure, hunc libellum nostra cura, ea qua apparet forma, primum edendum, in Academia vestra paratum, quam Vobis, quibus Academiæ nostræ cura commissa est, offerre ac dicare me potuisse judicavi. Cui enim plus deberem, quam Vobis, qui nobis ad hæc ornanda, publici-

blicique juris facienda, otia dediſtis? Acceſſit, Vos jure optimo à me exigere poſſe ſpecimen aliquod eorum, quæ cum Auditoribus noſtris, ſuper Matheſeos principiis tracto: ac mihi Geometricorum exercitiorum, quibus ſtudioſam juventutem imbuere ſtudeo, Vobis rationem eſſe reddendam. Et quod incrementa addit, eſt, quod Vobis etiam Temporis ex occupationibus quotidianis erepti, rationem aliquam perſolvere officii mei eſſe exiſtimavi. Præterea cum ab eo tempore, à quo ad Veſtram Academiam acceſſi,

me maximis beneficiis cumulaſtis, & etiamnum favore veſtro proſequimini; primam, quæ ſeſe mihi offerret, occaſionem amplectendam eſſe putavi, ut debitæ meæ obſervantiæ, reverentiæ, & grati animi, pro acceptis adeo multis beneficiis, & gratiis, publicum exſtaret monumentum. Merito Itaque gratam memoriam beneficiorum, quæ in me contuliſtis, declaro, hacque inſcriptione pie agnoſco, quod benignitatis Veſtræ, erga me, quibus multa debeo, documenta maxima ſint ac ſingularia.

Non

DEDICATIO.

Non dicam opuſculum Veſtris Illuſtribus Nominibus ornatum, ac comptum, ex ipſa inſcriptione firmum ſibi conciliare præſidium. Accipite ergo GENEROSISSIMI & ILLUSTRISSIMI, Patriæ & Academiæ PATRES! hoc qualecunque munuſculum, vobis lubentiſſime dicatum & conſecratum. Quod animo humili, obſequioſo & devoto offero: Accipite hoc Vos animo ſereno, placido & benigno. Clementer accipite; credite nihil aliud me egiſſe, quam quod officii mei rationem poſtulare cenſui. Veſtro

vero AMPLISSIMI AC GENEROSISSIMI VIRI! me, meaque ſtudia, favori commendo. Ego vero me intra muſei mei parietes recipiam, Deumque immortalem, ſupplicibus exorabo precibus, ut Vobis, quos non tantum Generis ſplendor, & muneris dignitas, ſed & meritorum in Rempublicam, magnitudo illuſtres fecit, tribuere tempus quam longiſſime, Vosque cum illuſtribus veſtris familiis ſalvos, & omni felicitatis genere cumulatos, incolumes ſervare velit; ut gravibus hiſce temporibus pru-

prudentissimis consiliis vestris & curis Decus Reipublicæ, Ecclesiæ, & Academiæ hujus tueri & augeri possitis, tandemque læti ac lubentes, certa beatioris vitæ in cœlis spe solutas corporis viculo animas tradere Deo. Valete & Favete. Dabam Hardervici A. D. 12. Julii. MDCCXXXVIII.

PRÆ-

PRÆFATIO.

LECTORI BENEVOLO

S.



Isto tibi, *benevole Lector*, novam Editionem Elementorum Geometricorum, ab Euclide Geometra quondam adornatam; verum Christophori Clavii Expositionibus, & Demonstrationibus munitam. Ut scias tamen velim, me non voluntarie, ac sponte mea, ad hæc Elementa publici juris facienda, sed necessitate quadam coactum, pervenisse. Quare paucis te in limine morari debeo,

ut

ut referam *primo* rationes, quæ me ad hæc Elementa edenda impulerunt, & urserunt: *dein* quid in hoc opere proferendo præstiti.

A quo Tempore mihi in hac Academia, publice Philosophiam ac Mathesin docere, demandatum est: in id omni ope, industria & alacri studio incumbere officium meum esse putavi, ut quovis modo possem, Studiosæ Juventuti, vel Philosophiam, vel Mathesin discere cupienti, facilem simul ac utilem navare operam, ejusque commodis pro virili servire. Verum cum inter Viros Eruditos hodie convenit, Studium Geometricum, basin & fundamentum esse ponendum Philosophiæ, vel saltem partis ejus principalis, Scientiæ nempe Rerum Naturalium, id primum mihi curæ cordique esse censui;

ut Juventutem Studiosam puris & sinceris Geometriæ principiis, quibus dein ad altiora, tam Veterum, quam Recentiorum Dogmata intelligenda pervenire possunt, erudirem. Interim memor dicti præclari sane Mathematici, *Davidis Gregorii* in Dedicatione, ubi dicit, *memini vero quam sæpe reclamares Viris in re Mathematica, novitatis, compendii, & forte sui nimium amantibus; cum interim juventutem ad ipsos fontes remittendam, Veterumque libros diligentius esse versandos, terendosque, vehementer urgeres.* Ideo ad hunc Scopum assequendum, Euclidea Elementa, probe intellecta imprimis nos ducere rebar; utpote tam Scriptores Antiqui, quam Recentiores super hæc Elementa, sua condunt Ædificia, cum Geometrica, tum Rerum Naturalium; propterea-

reaque ea intra privatos parietes, cum Auditoribus noſtris tractanda eſſe neceſſarium duxi. Sed cum non perinde erat, cujusnam Commentatoris vel Editoris ſequerer ductum, in exponendis coram Auditoribus noſtris Elementis iſtis, eum ſeligendum eſſe exiſtimavi, qui ſe præ cæteris Demonſtrationum perſpicuitate, & demonſtrandi rigore ac evidentia commendabat. Inter cæteros Chriſtophori Clavii Demonſtrationes, ac demonſtrandi Methodum, mecum penſitans, ambo mihi arriſere, & placuere valde. Tum ob elegantem, ac ſane perſpicuum modum, cum facilitate ſingulari conjunctum, quo in adſtruendis & probandis utitur propoſitionibus. Tum ob robur & efficacitatem, quæ ſingulis ineſt demonſtrationibus, ad perſuadendum

dum de veritate rei propositæ, ad quas nihil excipi potest, cum per omnes casus possibiles, rem contemplandam veram & firmam esse ostendit, & ad convictionem evincit. Quibus porro accessit, Eum Euclidis Scopo præ multis aliis etiam optime satisfacere, remque ab Euclide propositam, secundum ejus mentem, acu tangere. Eo nomine laudatur à *Reyhero in Dissert. de Euclide pag.* 40. 41. Quod *Clavius optime commentatus est in Euclidem*; ac uti ait, *in ejus commentariis, quicquid fere ad penitiorem Elementorum cognitionem requiritur, invenitur.* Suum etiam adjicit calculum *Ricciolus in Tomo primo Almagesti novi* de Clavio scribens, *quod in Geometria adeo excelluit, ut illum plurimi Mathematici velut Oraculum consuluerint; propter eximiam*

in

in ſcriptis ſuis perſpicuitatem, cum ſolida doctrina conjunctam, dum ipſa Sole clariora ſunt. Adſtipulatur his *Janus Nicius Erythreus in pinacotheca ſua* notans, *quod ex omnibus Clavii lucubrationibus, quibus in lucem prolatis, nominis ſui memoriam, omnium ſeculorum poſteritati commendavit, eſt commentarius, quo Euclidem illuſtravit, qui talis eſt, ut in Arce poni poſſit, quaſi Minerva illa Phediæ; in qua nihil eſt niſi abſolutum & perfectum.* Et ut alia ſilentio præteream teſtimonia, *Voſſii* tantum adducam, *de Scientiis Mathem. pag. 69.* Ubi de Clavio affirmat, *quod Eruditis omne punctum ferre viſus ſit, cum variis monumentis nominis ſui decus ad poſteros propagavit.* Quare non dubitabam, ad ipſius commentarii ductum in Euclidis Elementa, Geometrica principia Auditoribus meis tradere: cum

 per-

persuasum mihi habebam, in demonstrandi ordine, me nec commodiorem nec clariorem, in ipsa re probanda, nec firmiorem nec evidentiorem Autorem sequi posse. Verum brevi tempore percipiebam Clavianorum Elementorum Euclidis penuriam esse, cum Studiosa juventus ubique exemplaplaria sollicite quærentes, vix ac ne vix quidem unius, alteriusque exempli compotes fieri possent. Accedebat etiam, quod si hic vel illic exemplum unum in angulo lateret, illud nimio pretio solvendum erat. Unde factum est, ut quidam me audientes, aut audituri, quotidie queritarentur, quod Autoris, cujus vestigia legebam, participes fieri non possent. Porro Editiones Clavianæ, sexcentis & pluribus erroribus scatent, seu vitiis Typographi-

graphicis innumeris laborant, qui Tyronibus in Demonſtrationibus perlegendis, ac imitandis omnino moram injicere debent; ſi non aliquando ad propoſitionis intelligentiam inſequendam, prorſus impedimento ſint. Ulterius Figuræ, quæ ad propoſitiones illuſtrandas adjectæ ſunt, quæ omnino claræ & diſtinctæ, ad faciliorem intelligentiam deſiderantur; ſunt confuſæ & vitioſæ admodum, immo quandoque exiguæ nimis; uti ſunt eæ ſolidorum, quæ ſane ob linearum multitudinem, & varias ſuperficies in quibus jacent, præprimis accuratæ & juſtæ magnitudinis exiſtere debent. Deſunt aliquando lineæ, quæ ad conſtructionem requiruntur, deſunt perſæpe litteræ, quæ in verbis demonſtrationum citantur, & non

raro perverſo loco ſunt poſitæ; quare neceſſe eſt ut Tyrones ſæpe confundant, ac ineuntes conſtructionem moram iis injiciant, quod profecto moleſtum, & in nonnullis faſtidium movet, præcipue iis qui prima vice Autoris demonſtrationes imitantur. Præterea citationes, quæ in margine, juxta demonſtrationum verba, poſitæ reperiuntur, ſuis etiam non carent vitiis, in iis autem indicantur ea, quæ in præcedentibus conceſſa vel demonſtrata, jam Elementa exiſtunt ac principia, eorum quæ in iſta demonſtratione adſtruuntur, quorum noſtra ſcire intereſt; quapropter eos, qui non ſatis familiares habent Euclideas propoſitiones, ſæpe ob præpoſteram citationem, privant fundamento vero, ſuper quod tamen condita eſt

est probatio. Denique licet Clavii Commentarius in Elementa Euclidis sit omni laude dignus, tamen Tyronibus prolixus nimium est, si nempe oculos nostros convertamus vel in Definitionum expositiones, vel in ea, quæ singulis fere adjunxit demonstrationibus propositionum. Ea quamvis in se bona & laudanda sunt, Incipientes tamen, qui Euclidea Elementa scire cupiunt, iis carere possunt; cum haud raro tales, multiplici materia, quam in iis adducit, obruuntur, non distinguentes ea quæ Euclidis, ab iis quæ Clavius de se addidit, vel ex aliis mutuo desumsit; hinc mira in Tyronibus confusio, quæ cane pejor & angue deterior in Mathesi evitanda, ac omni conatu cavenda. Quæ omnia etsi cum animo meo sæpiuscule vol-

vebam ac revolvebam, tamen refugiebam initio novam adornare Editionem Clavianam; verum cum quotidie de penuria Exemplarium Auditorum meorum quærelæ ad meas perveniebant Aures, in anguſtiam redigebar, vel Clavium ducem in Geometria exponenda relinquere, ejusque loco alium ſeligere, quod repugnanter facerem; vel efficere ut recuderentur Elementa Euclidea à Clavio confecta. Verum cum utrumque ponderarem, magis è re auditorum meorum fore judicabam, Clavium porro ducem præeuntem, in contemplationibus noſtris Geometricis, ſequi. Idcirco in uſum tantum Auditorum meorum, ac eorum gratia novam hanc Editionem, in qua vitiis ſupra memoratis obviam ire, & quantum in me eſt, evitare ſtu-

ſtudui ; ex Clavii commentariis collectam , parare decrevi. En rationes *benevole Lector* , quæ me impulere ad hanc Editionem publici juris faciendam. Super eſt ut nunc etiam brevibus enarrem, quid in hac Editione præſtiti , vel ſaltem præſtare conatus fui. Et quidem *primo* è libris tredecim ab Euclide conſcriptis , in quos omnes etiam commentatus eſt Clavius , *ſex priores* , *ac undecimum & duodecimum librum* ſolummodo edi curavi ; quia cum Planorum Elementis , Solidorum conjungenda eſſe , tanquam cognitu ſumme neceſſaria , ſic firma mihi ſtabat ſententia. In qua tantum præclaros in Geometria Viros præeuntes ſecutus fui , nempe Tacquetos , Dechaleſios , Moreos , Ozanamos , Keilios , aliosque. Non tamen prætermiſi reliquos , quia

eos inutiles judicabam. Verum cum Tyronibus, qui institutionibus nostris privatis se committunt, hæc Elementa solummodo paravi, illi intellectis Planorum & Solidorum Elementis, reliquis in libris, si ipsis ita visum sit, dein cum fructu se exercere possunt. Illorum permagni interest, scire Elementa Planorum, ac Solidorum, quæ sex prioribus, & duobus reliquis, undecimo ac duodecimo libro continentur; utpote ea fundamenta sunt, quibus nostra Rerum naturalium Doctrina nititur. *Secundo* explicationes, quas Clavius super Definitionibus, Axiomatibusque Euclideis dedit, quales definitionibus ac axiomatis addidit, quasque prolixas nimium judicavi, ac quæ vel praxin aliquam, vel aliud quid ad Euclidis verba, & verborum sensum in-

intelligendum non directe ducens, continebant, pro captu meo contraxi. Ita tamen, ut secundum Clavii sententiam, sensum verborum Euclidis, satis clare declarent; nimiam interim evitavi brevitatem, ne dum brevis esse volo, obscurus fio. *Tertio* Scholia, Praxes, aliaque, quæ Clavius Propositionibus Euclideis, suisque demonstrationibus subjunxit, omisi pleraque omnia; exceptis tamen iis Scholiis, Lemmatibusque, quibus in suis demonstrationibus utitur Clavius: dum iis carere non possumus, quia ad ea, tanquam ad principia & fundamenta probationum, in iis provocat. Ob eandem rationem, quia è multis Corollariis petit argumenta demonstrationis suæ, plurima servavi Corollaria, quæ Clavius è probationibus suis elicuit.

cuit. *Quarto* Definitiones, Postulata, Axiomata, & Propositiones, quæ in Clavii Commentario in Euclidem occurrunt, omnes typis mandavi. Verum eas omnes contulimus cum definitionibus, axiomatibus, postulatis & Propositionibus, quæ in Gregorii Editione Græco-latina expressæ exstant; quas vero in Gregoriana reperire mihi non licuit, quasque Clavius vel de suo adjecit, vel ex aliis mutuo desumsit, eas omnes duabus ejusmodi [ ] uncinulis includi curavimus. Ut scilicet illi, qui Euclidem purum desiderant, unico obtutu videre possint, ea, quæ Euclidis sunt, eaque distinguere ab iis, quæ à Clavio sunt addita. *Quinto* quantum in me fuit, errores quos detexi in Editione Clavii, tum in ipso textu, tum in

in litteris, quæ respondent iis, quæ in schematibus sunt expressæ, quæ lineas necessarias figurarum annexarum declarant, corrigere sedulo studui: uti & citationes omnes in margine positas, male allatas, restituere omni ope nisus fui; forte hic vel illic mendum aliquod remansit; verum quis omnes potest cavere errores? cum ne Argus quidem sufficeret. Id saltem effeci, ut nunc multo correctior, quam priores omnes Clavii Editiones, lucem adspiciat. *Sexto* Figuras, ad propositionum intelligentiam facilem reddendam, accommodatas, separatim æri incidi curavi; in iis elaborandis, id præprimis studui, ut clare & distincte ante oculos ponerent, omnes lineas ad constructionem, ac ad ejus compositionem necessarias; ne ve-

ro

ro lineæ inter ſe confunderentur majuſculas depinxi ; ac quæ ad ſolidorum ducunt notitiam, quæ in prioribus Editionibus, præcipue quæ in forma octava, ut ajunt, ſunt, confuſæ ac vitioſæ admodum erant ; diſtinctiores multo elaboravi, ut Tyrones ſibi magis vivide conſtructionem figurarum repræſentare poſſint. Interea ſedulo cavi, ut litteræ in figuris expreſſæ reſponderent iis, quæ in Demonſtrationibus occurrunt. *Septimo* his Elementis præmiſimus, Hiſtoricam narrationem brevem de Euclidis vita, ac Elementis, de qua tamen non multum polliceri audemus, quoniam extra forum meum eſt, accuratam ac omnibus numeris abſolutam tradere hiſtoriam, quare à Lectore comiter expetimus, ut ſi forte ea non arrideat, vel errores

errores quosdam in ea detegat; in meliorem partem interpretari velit, cum nimis ſero in ea incidi cogitata, ut de vita Euclidis quædam narrare in animum induxerim. In reliquis Clavium ſumus ſecuti, cum cuilibet propoſitioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus ſignificat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum eſt ſecutus in Euclidis Propoſitionibus. Alter vero in ipſa Propoſitionum ſerie deſcriptus refert diſpoſitionem propoſitionum ex traditione Theonis, ſeu potius ipſius Euclidis, qui etiam obſervatur in codicibus Græcis. Id vero eo conſilio factum eſt, quoniam cum à quibusdam Geometris propoſitiones Euclidis juxta ordinem Campani, ab aliis vero juxta Theonis ſeriem citentur; ideo

ideo necessarium esse duximus, ut utriusque interpretis numerus apponeretur. Denique ne cursus demonstrationum interrumperetur, citavimus principia & propositiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphabeti, cui similis literula respondet in demonstratione, ut facilius cognoscatur, ad quem locum quælibet citatio sit referenda. Citationes vero ipsæ hoc modo intelligendæ sunt; I. *Def.* significat prima definitio; I. *Pet.* prima petitio, vel primum postulatum, I. *Prim.* prima propositio primi libri, 23. *Undec.* significat propositio vigesima tertia undecimi libri: & sic de reliquis; ex quibus reliquæ citationes facile intelliguntur. Vale, Lector benevole, & conatibus nostris fave: simul peto, ut si quædam supersint errata, benigne excuses. Scribebam Hard. mense julio CIↃIↃCCXXXVIII.

BREVIS

Errata typographica quæ inter relegendum mihi occurrere, hoc modo corrigat Benevolus Lector.

Pag.	Lin.	Pro	Lege
20.	6.	Onnis	Omnis
31.	ultima.	ſitalterius.	ſit alterius
33.	19.	utrumqu.	utrumque
38.	13.	que BA	quæ BA.
39.	2.	om nia	omnia
59.	18.	rectis	rectis.
61.	23.	externus DCF,	externus DCE,
93.	17.	ipſi CF,	ipſi CE,
96.	17.	rectaugulo	rectangulo
105.	24. in marg.	10. def.	10. def. primi
107.	22. in marg.	10. def.	10. def. primi
109.	12. in marg.	15. def.	15. def. primi
	28. in marg.	15. def.	15. def. primi
124.	5.	recta quædem	recta quædam
154.	20.	deſcribendns	deſcribendus
156.	9.	Quareq uadratum	Quare quadratum
165.	35.	THEOR.	PROBL.
171.	5.	habituto	habitudo
173.	2. à fine	æquemultiplicia	æque multiplicia
174.	4.	æquemultiplicia	æque multiplicia
	7.	æquemultiplicia	æque multiplicia
189.	28.	nna	una
208.	2. a fine	primo	prima
220.	23.	permutamdo	permutando
227.	5. a fine	conſtituantur	conſtituatur
237.	4. a fine	ad CA,	ad DA,
267.	17.	cnm ſexta	cum ſexta
274.	7.	imagininemur	imaginemur
277.	22.	angulii	anguli
380.	27.	circulus	circulis

BREVIS NARRATIO HISTORICA DE EUCLIDIS VITA, AC ELEMENTIS.

§.I. CUm novam hanc Elementorum *Euclidis*, ex *Christophori Clavii Bambergensis*, insignis sane Geometræ, in Euclidis Elementa, commentariis, collectam Editionem, auditoribus, qui privatis nostris institutionibus in Geometriæ scientia erudiri cupiunt, pararem; haud ab instituto alienum esse putavi, breviter de Autore nostro, ac Elementis, quæ de rebus Geometricis composuit, quædam recensere. Scilicet ut aliquam saltem habere cognitionem Autoris, ac Operis, quem tractemus, illi possint, qui nos ea Elementa exponentes

audient. Tum ut eorum, quæ de Euclide narrantur, ac quæ de his Elementis à Viris Doctissimis foventur sententiæ, non sint penitus rudes. Tum ut aliquantum intelligant, quæ de iis tenenda, vel rejicienda videntur. Antequam vero ad ipsam de *Euclide* narrationem me accingam, cum in sequentibus nobis usui futura sint, & verbo referre de Geometriæ natalibus, secundum quorundam sententiam; & perbreviter eorum clarorum Mathematicorum, qui ante *Euclidem* suis inventis præ cæteris excelluere, mentionem facere; haud incongruum fore duximus.

In Geometriæ Originem, unde Mortales primo de ejusmodi studii genere cogitandi ansam cepere; & Autorem à quo primum inventa est nobilis hæc scientia; & quo demum tempore elucere inchoavit præclarum hoc studium, si inquiramus: Multa nobis in iis occurrent, quæ ut certo affirmentur, non satis manifesta & evidentia videntur. Non enim latet, quosdam asserere, eam Doctrinam ab Ægyptiis, necessitate quadam coactis, ab initio fuisse inventam. Opinantur scilicet eos ob annuas Nili inundationes, quibus agrorum limites operirentur limo, ac sic confunderentur; arte quadam ac scientia, qua rursus agri dividerentur, opus habuisse. Verum hanc rite pensitantes opinionem, speciem magis veri habere, quam ut certum aliquid de Originis causa probet, cuilibet attendenti apparebit. Desunt enim nobis Veterum testimonia sufficientia, quibus

bus de ortus ratione firmo suo stat talo hæc sententia. Si JOSEPHO *antiquitatum lib.* 1. *cap.* 9. fidem habeamus, studium hoc Geometricum à *Chaldæis*, *Assyriisque* fuisse excultum, ac ab *Abrahamo*, jussu Dei in Palæstinam, ac inde in Ægyptum profecto, in illud Regnum tum primum fuisse translatum; ibidem testatur. Ægyptii vero ipsi, certi cujusdam autoris forte inscii, Deo suo, *Theuth* dicto, inventionis gloriam tribuunt, uti refert PLATO *in Phædro operum pag. m.* 268. *col.* 1. *in princ.* ubi ita scribit de *Theuth* loquens; *Hunc primum omnium numerum, & numeri computationem invenisse, Geometriamque, & Astronomiam, &c.* Verum dubia licet ea sint, quæ de Origine apud Ægyptios quærenda, narrant Autores; id tamen satis certo constat, Ægyptios hoc Doctrinæ genus coluisse. Etenim *Thaletem Milesium*, qui fere sexcentis ante natum Christum annis, secundo ab Urbe condita seculo, in Græcia floruit; in Ægyptum iter facientem, indeque in Græcum Solum reversum, traduxisse Geometriæ Scientiam, ex LAERTIO discimus. Qui simul nobis autor est, *Euphorbum Phrygem* præcedenti seculo Contemplationes Geometricas de lineis jam composuisse; monente DECHALES *in Tractatu Proœmiali de progressu Mathes. cap.* 2. *Thaletem* proxime secutus est *Mamertinus*, qui præclarus celebratur Geometra. Quo eodem tempore, *Amethistum* hujus scientiæ præprimis gnarum, vixisse statuunt. Hos eodem seculo excepit excellens ille Geome-

triæ Stator *Pythagoras Samius*; qui à multis, Geometriæ in Græciam advectæ autor habetur: quocum secundum effluxit seculum.

Tertium quod sequitur ab Urbe condita seculum, plures produxit in hoc studiorum genere præstantes viros; inter quos primo numerantur *Anaxagoras Clazomenius*, qui *Pythagoræ* successit; dein *Oenopides Chius*, hujusque discipulus *Zenodorus*; & qui *Zenodorum* proxime secutus est, è mercatore Geometra, *Hippocrates Chius*: Hic imprimis celebratur, quod primus Elementorum Geometricorum, quæ temporis injuria periere, Scriptor exstiterit. Hos excepere *Theodorus Cyreneus*, *Timæus Locrus*, Mathematum Scriptor.

Quartum, quod post hos Autores, illuxit seculum, Geometriæ studiosorum & inventorum valde fuit fertile. In eo claruere *Democritus Milesius*, hujusque æqualis *Protagoras*; Hos secutus *Plato Atheniensis*, divinus cognominatus, strenuus Matheseos cultor; de quo referunt, Eum singulis diebus Geometricum Problema, discipulis suis exposuisse. Quem deinceps insecuti, *Amiclas Heracleotes*, *Leodamas Thasius*, & *Neoclides*; *Platonis* aut auditores, aut familiares; *Leon* porro illis successit, qui secundus dicitur, à quo Elementa Geometrica, auctiora, quam ea *Hippocratis*, quæ simul ac priora, temporis injuriam passa, non exstant; scriptis exposita fuere. Postea exstitere *Eudoxus Gnidius*, vel ut alii scribunt, *Cnidius*, *Platonis* in Ægyptum comes, qui quintum Elementum Euclidis

dis de Proportionibus invenisse dicitur; ac *Theatetus Atheniensis*, cui de quinque solidis corporibus scriptum tribuitur, verum ejus non exstat lucubratio; insecuti sunt dein *Bryso*, & *Antiphon*.

In quinto ab Urbe condita seculo floruere, *Theudius Magnes*, tertius qui numeratur Elementorum Geometricorum scriptor: *Hermotimus Colophonius*; *Cyzicinus Atheniensis*; *Aristaus Senior*; *Philippus Metaus*; *Platonis* magistri discipulus: *Menechmus*; *Eudoxi* discipulus; *Geminus*; *Perseus Citticus*; *Aristoteles*; ac tandem Geometriæ illud sydus eluxit EUCLIDES; qui licet his Geometris posterior fuerit; ac ex iisdem nonnulli Elementa Geometrica Scriptis reliquerint, tamen omnium antiquissimus habetur à VOSSIO *de Scientiis Mathematicis cap.* 15. §. 1. quorum labores in Geometria habemus; ac omnium Græcorum primus, qui omnia collegit, collectaque digessit. Hunc Autorum catalogum partim me texere docuere, CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES *in tractatu Prooem. de progressu Matheseos*, *præmisso tom.* 1. *Mundi Mathematici*; qui eum se è PROCLI *libro* 2. *Commentariorum in Euclidem* hausisse dicit: partim TACQUET *in Historica narratione de ortu & progressu Matheseos.*

§. II. Ex his vero omnibus Geometris, licet cuncti clari celebrentur, propter Doctrinæ Geometricæ peritiam; quam tum suis inventis ditarunt, tum sua notitia & cultu auctiorem, ac firmiorem reddiderunt; EU-

CLIDEM tamen ſolum elegimus, de quo pauca hiſce paginis referremus. In vitam hujus Geometræ itaque inquirentes, Solum ejus natale, quod tulit hunc Atlantem Geometricum, ſeſe inveſtigandum ſponte nobis ſiſtit. Sed ſuper hoc Autorum ſententias rogantes, quod capita, tot fere ſententiæ reperimus; adeo diſſentiunt inter ſe Autores de ſtatuenda Patria *Euclidis* noſtri. Quidam ejus Patriam, GELAM, civitatem *Siciliæ*, fuiſſe putant; ac ea de re *Euclides Geometra*, *Gelous* apud illos audit: inter quos eſt Scriptor Bibliothecæ Veteris Siculæ, anno 1700. à Meſſanenſi quodam editæ, referente FABRICIO *Biblioth. Græc. Lib.* III. *Cap.* XIV. §. 1. Eam opinionem, qua *Euclidem* è *Gela* oriundum cenſent, forte è *Laërtio* collegere; quia LAERTIUS. *Lib.* II. *ſegm.* 106. de Euclide Megarenſi ſcribit, quod ſecundum quosdam *Gelous* ſit habitus. Verum hæc ſententia ſuo videtur privari fundamento, ſi in ſequentibus §. 9. palam conſtiterit, eum, de quo ſcribit *Laërtius*, *Euclidem*, diverſum eſſe à noſtro *Geometra*; quare ex eo principio *Geometræ Euclidis* Terram parentem, *Gelam* fuiſſe, aſſerere non auderem. HARDUINUS *ad Plinium* Autorem noſtrum PERGA, civitate *Pamphiliæ* oriundum cenſet; at monet FABRICIUS *loco citato*, *Apollonium* Conicorum Scriptorem, in animo tum habuiſſe *Harduinum*, cum id de *Euclidis Geometræ* patriis ſcripſit ſedibus. Nam inter Scriptores tam Veteres quam Recentiores id ſatis manifeſto conſtat; *Apollonium*, *Pergam* ſedem

ſedem natalem habuiſſe ; Verum deſunt nobis teſtimonia, in quibus *Euclidem Pergæ* natum, educatumque fuiſſe, aſſeritur. Alia porro, ſed incerti Autoris, de *Euclidis Geometræ* patriæ Solo eſt cogitatio ; videtur tamen ea eſſe Hiſtorici cujusdam Arabis, ex quo illam deprompſit GREGORIUS ABULPHARAJUS *in hiſtor. compend. Dynaſtarum* arabice edita, & latine verſa à *Pocokio*. In qua Autor ille hanc ſovet opinionem, quod *Euclides Geometra* è civitate TYRO ortum duxerit, ac propterea eum *Tyrium* facit. Monente KONIGIO *in Bibliotheca Veteri & Nova*. Sed præterquam quod hujus ſententiæ Autor ſit incognitus, præterea etiam Veterum deſunt judicia, quibus hæc corroboranda foret. Longe vero vulgarior, quæ etiam plurimos nacta eſt, inter Viros Doctos, Patronos, eſt exiſtimatio ; *Euclidem Geometram*, MEGARÆ, quæ *Græciæ* oppidum eſt, juxta Iſthmum Corinthiacum, natum fuiſſe : ideo *Megarenſem* Eum vocare ſolent. Hanc opinionem CAMPANUS habuiſſe videtur, uti ex inſcriptione Elementorum à ſe editorum haud obſcure colligere eſt ; cum ea inſcribit *Euclidis Megarenſis Mathematici clariſſimi Elementorum Geometricorum libri* XV. Cui calculum ſuum adjecit FRANCISCUS FLUSSAS CANDALLA, inſcribens commentarium ſuum in *Euclidem* ; *Euclidis Megarenſis Mathematici clariſſimi Elementa Geometrica.* Idem ſenſere GESNERUS *in Bibliotheca.* Uti & ABDIAS TREW eidem

dem huic ſententiæ favet, quod ſequentia verſicula ſatis declarant.

Fundamenta, quibus conſurgit tota Matheſis,
Cyclum cum numero, tu Megarae, doces.

In eandem accipiunt partem, RICCIOLUS *in Chronici parte ſecunda, præmiſſi Tomo primo Almageſti novi*, ad vocabulum *Euclides*; ac multi alii. Fortaſſe horum multum labefactabitur cogitatio, ſi in poſterum §. 8. & 9. conſtiterit, *Euclidem Megarenſem*, qui ſæpe confunditur cum *Geometra* noſtro, omnino diſtinguendum eſſe ab *Euclide* Elementorum Scriptore. Diſſentiunt ab his pariter multi Viri Eruditi, exiſtimantes *Euclidem* noſtrum *Alexandrinum* fuiſſe; cum ALEXANDRIÆ, *Ægypti* prænobilis urbis; quæ hodie Turcis *Scanderia*, Italis vero *Aleſſandria* appellatur, in illa planitie, quæ Mareotem Lacum, & mare mediterraneum interjacet: ab *Alexandro Magno*, per *Dinocratem* Architectum Macedonem, conditæ; præclarum hunc Geometram vel lucem adſpexiſſe primo; vel, quæ magis manifeſta, monumentis Veterum fulcita, in ea ipſum floruiſſe civitate aſſerunt. Nam *Alexandriæ* Eum fuiſſe genitum difficulter aſſerere auderem, cum diſertum nullum de natalitio iſto *Euclidis* oppido, Veteris alicujus Scriptoris teſtimonium habemus; obſervante FABRICIO *in Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* XIV. §. I. *ac* GREGORIO *in præfat. in Euclidem*. Potius ſubſcriberem ſententiæ, affirmanti, minime certo

certo constare, quo Genere aut Patria oriundus sit *Euclides Geometra*: à cujus partibus stant GREGORIUS *loc. cit.* & CLAVIUS *in proleg. in Euclidem.* Quippe penes Autores Veteres, expressis nihil reperitur verbis, ubi locorum ortus est *Euclides Geometra.* Si vero conjecturis, & quidem plausibilibus, hic ullus sit locus, forte *Alexandria*, *Euclidis* nostri incunabula haberi possunt; si saltem, ubi imprimis floruerit, ibidem etiam primo lucem adspexisse statuatur. Nam quamvis Scriptores Veteres taceant, de natali urbe nostri Geometræ, tamen manifesto satis, ubi inclaruit nostrum Geometriæ sidus, in suis monumentis declarant. Etenim PROCLUS *in secundo comment. in Euclid.* nobis testis est, *Euclidem Geometram* in Ægypto vixisse; referente VOSSIO *de scientiis Mathemat. cap.* 15. §. 1. Ac præterea PAPPUS ALEXANDRINUS, qui circa annum Domini 390. vel 400. floruit, teste RICCIOLO *Chron. pars.* 2. *ad vocabulum Pappus*; autor est, *Euclidem Geometram Alexandriæ* Scholam celebrem habuisse, ac discipulis ibidem operam dedisse. *vid. ejus collect. Mathem. lib.* 7. *pag. m.* 240. idem referunt VOSSIUS *loc. cit.* quod *Alexandriæ* nempe Mathesin docuerit *Euclides Geometra.* Consentiente GRONOVIO *in notis ad Gellii lib.* 1. *cap.* 20. Immo GREGORIUS *loc. cit.* scribit. *Primum Eum fuisse qui ista in urbe Mathesin felicibus auspiciis docuit.* Quin & hæc Schola Mathematica *Alexandriæ* primo, *Euclidis* ductu, condita, optime de re Geometrica merita, quam plu-

rimos produxit discipulos. De qua sequentia notat VOSSIUS *loc. cit. Valde autem illud commendat Scholam ab Euclide erectam Alexandria, quod non solum multos reliquerit discipulos; sed ab ejus tempore usque ad tempora Sarracenica, vix ullum invenire sit nobilem Mathematicum; quin vel Patria fuerit Alexandrinus, vel saltem Alexandria dederit operam Mathesi.* Ex quibus haud collectu difficile est, *Euclidem Geometram* multum ac diu *Alexandriæ* versatum fuisse, istoque in oppido fixam tenuisse sedem; ac forte ibidem prognatum esse. Quapropter eo nomine *Alexandrinum* Eum merito dici posse conjicio.

§. III. Ætatem ejus quod attinet, de ea iterum varias in partes abeunt Viri Docti. Etenim GEORG. REISKIUS *in Margarita sua Philosophica lib.* VI. *cap.* I. de tempore quando floruit *Euclides* noster miram alit opinionem; dum asserit, *Euclidem Geometram Hippocrate* esse antiquiorem; cum ejus patrem fuisse scribit. At vero exigui momenti hæc videtur sententia, quæ auctoritate nulla Veteris alicujus Scriptoris nititur. VALERIUS MAXIMUS vero *lib.* 8. *cap.* 12. longe ab eo dissensit, qui *Euclidis Geometræ* ætatem incidisse in *Platonis* tempora statuit; eumque *Platoni* coævum facit: scribit enim *loc. cit.* conductores aræ sacræ à *Platone* ad *Euclidem Geometram* fuisse missos. Quibus verbis manifesto declarat, quod existimaverit, cum *Plato* inter vivos superesset, *Euclidem Geometram* vixisse. Hujus Autoris vestigia

ſtigia ſequuntur illi, qui *Euclidem* ad *Platonis* tempora referunt. Sed notant Viri Docti ad hunc locum *Valerii Maximi*, Eum ibidem commiſiſſe errorem; uti §. 8. adducemus. Quapropter, cum præter *Valerium*, alium nullum habemus Scriptorem præeuntem, dubia omnino, ac penitus rejicienda eſt ſententia ea, qua *Euclides Geometra* ætatis ejusdem cum *Platone* cenſetur. In diverſam iterum abit partem GREG. ABULPHARAJUS *in Hiſt. comp. Dynaſt. Euclidem Geometram*, *Platone* multo juniorem ſtatuens, cum natu minorem *Apollonio*, qui longe poſt Tempora *Platonis* claruit, eum fuiſſe ſcribit. Verum neque hæc de vitæ tempore *Euclidis* omnibus numeris perfecta eſt opinio; Contradicunt enim unanimi conſenſu Veterum monumenta, in quibus *Apollonius Archimede Syracuſano*, qui *Euclide Geometra* natu minor eſt, poſterior ætate ponitur. Quibus addi meretur *Apollonium* ſua ſcripta, ſuper Euclidea Elementa tanquam firma principia, & fundamenta ædificaſſe; quæque idcirco tempore priora eſſe debuerint. Sed miſſis iis omnibus, quæ à Recentioribus Scriptoribus, de tempore, quo floruiſſe putant *Euclidem Geometram*, narrantur; ad Vetuſtiores confugiendum eſſe cenſemus, illosque audiendos eſſe, quid de ætate *Euclidis* loquuntur, ut verum, vel ſaltem veritati proximum, vitæ tempus Autoris noſtri ex illis intelligamus. Quare meo judicio haud contemnenda ſunt *Procli*, & Antiquorum Græcorum, è quibus *Proclus* ſua hauſit, teſtimo-

ſtimonia. Illi autem ſcribunt, *Euclidem Geometram*, *Hippocrate*, *Leonte*, *Theudio*, *Hermotimo*, *Socrate*, *Platone*, *Eudoxo*, *Platonis* diſcipulo, *Menæchmo*, *Eudoxi* diſcipulo, natu minorem eſſe; verum *Eratoſthene*, & *Archimede*, quia is *Euclidis* mentionem facit, natu majorem. Etenim PROCLUS *in lib.* 2. *comment. in Euclid.* commemoratis aliquot, *Platone* antiquioribus, æqualibus, ac diſcipulis, ſubjicit *Euclidem*, qui Elementa conſcripſit, non multo ætate poſteriorem illis fuiſſe; immo addit dein, *Euclidem* natu minorem eſſe *Platone*, minimum nonaginta annis. Porro ex eodem autore *Proclo* ſpecialius diſcimus, *Euclidem* noſtrum in Ægypto, ſub *Ptolemæo Lagi*, poſt *Alexandri Magni* mortem, primo Ægypti Rege, floruiſſe. Quam ſententiam ampleƈtuntur GREGORIUS *in præfat. in Euclid.* ac CLAVIUS *in Proleg. Euclidem.* ut & COMMANDINUS *in præfat. in Euclid.* RAMUS *in Schola Mathematica* & multi alii. Immo ſi RAMO *loc. cit. lib.* 1. *pag.* 22. & 23. & FABRICIO *in Bibl. Græc. lib.* III. *cap.* XIV. §. 1. credimus, noſter Geometra huic *Ptolemæo* fuit notus: addunt præterea è *Proclo* eum à *Ptolemæo* Rege interrogatum fuiſſe; num quid eſſet via ad Geometriam magis compendiaria, quam ſit iſta στοιχείωσις? (Ita à *Proclo* fere ſemper vocatur) ad quam quæſtionem ipſi à Rege propoſitam, eum reſpondiſſe refert *Proclus*: μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν: id eſt, *non eſſe Regiam viam ad Geometriam.* Conferatur SAMUEL TENULIUS *in notis ſuis ad Jamblichi* com-

comment. in Nicomachi Arithmeticam. Ubi etiam ſub *Ptolemæo Lagi* filio in Ægypto *Euclidem* fuiſſe profeſſum affirmat. Hanc autem de ætate *Euclidis* è *Procli* ſcriptis ſententiam collectam perpendentes, ei plus ponderis & firmitatis ineſſe, quam cæteris antea recenſitis, qui ad ſequentia attendit, facile concedet. Nam nobiſcum recolentes tempus, quo vixit *Proclus Lycius*, cognominatus *Diadochus*, id eſt ſucceſſor, quod circa annum Chriſti quingenteſimum incidit; teſte VOSSIO *de ſcient. Math. cap.* 33. *b.* §. 26. & BLANCANO *in Chronol. Mathem.* optime hac de re ex ſcriptis Græcorum antiquis, quæ ſucceſſu temporis periere, erudiri potuit. Accedit quod ea, quæ de ætate *Euclidis* refert *Proclus*, ex *Theophraſti* & *Eudemi* ſcriptis Hiſtoriarum Geometricarum, quæ dein deperdita ſunt, mutuo deſumſit: teſtante COMMANDINO *loc. cit.* RAMO *loc. cit.* & TACQUET *de ortu & Progreſſu Matheſ. pag.* 21. Quod vero hi Autores Hiſtoriarum Geometricarum compoſuerint libros, LAERTIUS in vita *Theophraſti Ereſſii* narrat; Eum quatuor libros Hiſtoriarum Geometricarum ſcripto reliquiſſe; pariter *Eudemi* Hiſtoriæ Geometricæ laudantur à SIMPLICIO *ad lib.* 1. *Phyſ. Ariſtotelis.* Conferatur JONSIUS *de Scriptoribus Hiſtor. Philoſ. lib.* 1. *cap.* XV. Ex horum ſcriptis de vero vitæ tempore *Euclidis* certo informari potuit PROCLUS; cum hi Viri eodem tempore ac *Euclides* floruerint; *Euclidis* coætaneos eos fuiſſe MENAGIUS *ad Diog. Laërt. lib.* 5. *ſegm.* 42. obſervat; utpote

pote *Theophrastum* & *Eudemum Aristotelis* discipulos fuisse asserit. GRONOVIUS vero *in not. ad Auli Gellii lib.* 13. *cap.* 5. *Aristotelis* sodales fuisse notat. Porro VOSSIUS *loc. supra cit. cap.* 15. §. 1. scribit *Theophrastum* eodem ac *Euclides* tempore vixisse. Quibus juste ad lancem æquissimam ponderatis, in errores nos non incidere existimamus, si *Alexandrinum Mathematicum* nostrum, sub *Ptolemæo Lagi* filio celebrem fuisse, cum *Proclo* statuamus. *Ptolemæus* autem, mortuo *Alexandro Magno*, primus Ægypti Rex, translato in *Philadelphum* filium regno, obiit anno primo Olympiadis CXXIV. ante Christum natum anno 282. notante PETAVIO *Ration. Temp. part.* I. *lib.* III. *cap.* XV. Vel secundum *Fabricii* computum *loc. cit.* post quadraginta annorum imperium; animam egit anno 277. ante natum Salvatorem, Olympiade CXXIII¾. Quocirca plus quam trecentis ante æram Christianam annis, Ægypto imperare coepit *Ptolemæus* primus, uti recte censet GREGORIUS. *in præfat. laud.* seu uti CLAVIUS *in proleg.* scribit, ante nativitatem Christi anno 319. imperare incepit *Ptolemæus Lagi.* Itaque *Euclides Geometra* inter annum 319. & 282. ante nativitatem Christi inclaruisse habendus est; eoque temporis intervallo, Alexandriæ famosam suam Scholam Mathematicam erexisse, ac publice Geometriam discipulos docuisse; cum autore TACQUET *loc.* supra *cit.* vitam posuit *Euclides* noster anno 284. ante Christum; ideo circa annum 300. ante Christum natum imprimis floruit.

§. IV.

§. IV. Cum vero iis temporibus imprimis celebris erat *Platonis* Schola; Platonicorum usus est institutionibus, in quorum doctrina ita versatus est, ut summam facile sibi comparaverit laudem. Testatur enim CLAVIUS *in proleg. in Euclid.* Ipsum summa laude in Academicorum disciplina fuisse versatum. Ac cum in Academia *Platonis*, præceptoris instituto, Matheseos studium tunc maxime vigebat; *Euclides*, postquam Platonicorum dogmatibus satis instructus fuerat, totum animum ad disciplinas Mathematicas transtulit; in quibus sic eruditus est, quotidiana fere *Platonis* discipulorum consuetudine, ut progressus admirabiles, ac sempiterna ævi memoria dignissimos, in iis fecerit. Vid. COMMANDINUS *in Euclid. Elem. proleg.* Nihilominus ea, quibus imbutus erat, principia, Academicorum institutionibus sibi comparata; postea servavit. Etenim Platonicorum Doctrinam sectatus est. Quoniam enim Sectæ Platonicæ Patroni, cuncta corpora mundana, præcipue ad quinque corpora regularia, Pyramidem, sive Tetraëdron, Cubum sive Hexaëdron, Octaëdron, Dodecaëdron, & Icosaëdron, reducebant: quæque propterea corpora Platonica sæpe audiunt. Cum omnia ex quatuor Elementis constare credebant, Tetraëdron Igni, propter ejus cum acumine ignis similitudinem; Octaëdron Aëri, qui sicut aër igni, ita octaëdron Pyramidi levitate formaque proximum est; Icosaëdron Aquæ ob mobilitatem, quæ hæc

hæc figura huic Elemento ſimilis eſt ; Hexaëdron Terræ, ob ſtabilitatem ejus aſſignarunt; & Dodecaëdron denique Coelo compararunt, quod, ſicut coelum duodecim ſignis Zodiaci cingitur, ita Dodecaëdron duodecim habet baſes ; item ſicut Coelum ſuo ambitu reliqua in ſe comprehendit Elementa , ita Dodecaëdron inter quinque iſta corpora regularia , quæ in eandem includi poſſunt Sphæram omnium eſt maximum, & quod reliqua omnium aptiſſime circumſcribit. Videatur SAMUEL REYHERUS *in Diſſert. de Euclide cap.* 3. §. 4. & MARSILIUS FICINUS *in Compendio in Platonis Timæum cap.* 40. Hinc etiam *Euclides* noſter *Geometra*, totam ſuam Elementarem inſtitutionem , ad hæc quinque corpora regularia reduxit. Etenim in ſuis Elementis , quinque hæc corpora Platonica , ſub Geometrici examinis incudem, vocare ſtuduit: & hunc ſibi propoſuiſſe, primarium Scopum , in Elementis ſuis condendis videtur. Scilicet ut omni niſu examinaret quinque iſta corpora Platonica, ac ut eorum rigidam daret apodeixin; propterea duodecim priores adornavit libros. Qua de re ita loquitur KEPLERUS, omnes omnino Propoſitiones , omnium librorum ; exceptis iis , quæ ad numerum perfectum ducunt; ad mundanarum figurarum conſtitutionem referuntur : cum Elementorum inſtitutionis finem ſtatuerit, τῶν κοσμικῶν σχημάτων habitudinem & compoſitionem. confer. GREGORIUS *in Præfat. in Euclid.* Ex quibus haud obſcure quilibet facile derivare poteſt,

Eucli-

Euclidem Geometram Sectæ Platonicæ addictum fuisse; ejusdemque Institutionis & Doctrinæ, quod ad Rerum Naturalium Scientiam, sectatorem haud contemnendum fuisse. Quapropter PROCLUS *in comm. in Euclid.* Eum Platonicum fuisse disertis testatur verbis. Non igitur conjectura quadam hic nobis opus est, ut sciamus, qualisnam fuerit *Euclides Geometra.* Eum enim fuisse Philosophum Platonicum, qui rerum naturalium Scientiæ, secundum Præceptoris sui præcepta, inprimis operam navavit, ac Geometricæ scientiæ studiosissimum; in qua summa laude excelluit, omnibus, ex ante dictis, clarum esse existimo. Ad hanc autem in Scientiis Naturalibus, & Geometricis peritiam, porro ei accesserant plura animi bona; quibus Natura Eum bearat. Erat enim Vir suavissimi ingenii, & contentionis minime amans. Nam de eo scribit PAPPUS *collect. Mathem. lib.* 7. *pag. m.* 240. *Quod Euclides, qui Elementa tradidit, ac qui Alexandriæ discipulis operam dedit, fuerit vir mitissimus, & benignissimus erga omnes, nullo modo infensus, sed accuratus, non arrogans.*

§. V. Præter hunc à nobis descriptum *Euclidem*, in Schola Platonica, Rerum Naturalium doctrinis, secundum Præceptoris mentem, cum institutum optime, tum etiam perfectè planeque eruditum; ac præterea rerum mathematicarum scientia instructum, & doctrina excultum: Scriptores tam Veteres, quam Recentiores, etiam

mentionem faciunt *Euclidis*: qui eo nomine celebratur, quod Philosophus fuerit Socraticus; & Auditor ipsius *Socratis* describitur. Eum ajunt, *Megaris*, Græciæ oppido, ortum fuisse; ibidemque habitasse, & Scholam habuisse publicam, ac idcirco *Euclidem Megarensem* appellari. Etenim de eo, recitato prius Atheniensium decreto, ita scribit GELLIUS *noct. attic. lib.* 6. *cap.* 10. *Tum Euclides, qui indidem megaris erat, quique ante id decretum, & esse Athenis, & Audire Socratem consueverat; postquam id decretum sanxerunt, sub noctem, quum advesperasceret, tunica longa muliebri indutus, & pallio versicolore amictus, & caput rica velatus, è domo sua Megaris ad Socratem commeabat; ut vel noctis aliquo tempore consiliorum, sermonumque ejus fieret particeps.* Præterea DIOG. LAERT. qui ejus vitam describit, *lib.* II. *segm.* 106. similiter asserit *Euclidem* hunc *Socraticum* Megarensem esse, eo quod *Megaris* natus ac versatus sit; Sectamque condidit, ab ipso Autore, Megaricam dictam. Porro STRABO *Geogr. lib.* 9. *pag.* 602. Eundem *Megaris* oriundum statuit, quum de eo scribit, *habuit aliquando*, urbs scilicet Megarensium, *Scholam Philosophorum, qui Megarici dicebantur, successores Euclidis Socratici, Patria Megarensis.* Denique, ut alios omittam, CICERO *Academ. Quæst. lib.* 2. *cap.* 42. testatur illum *Euclidem*, qui *Socratis* discipulus fuit, *Megaram* Patriam habuisse, ait enim; *Post Euclides, Socratis discipulus, Megareus* &c. Quæ itaque testimonia istorum Scriptorum consona, Patriam

triam *Euclidis Socratici* Megaras fuiſſe abunde ſatis comprobant. Licet alii ſedem ejus natalem in *ſicilia* quærant; ac ejus origines ex urbe Gela repetant, quum Eum Geloum faciunt. vid. DIOG. LAERT. *loc. cit.*

§. VI. In hujus vero *Euclidis Socratici Ætatem*, quando inclaruit, inquirendum jam nobis venit; ad quam determinandam multum nos juvant GELLII verba, paragrapho præcedenti 5ta. adducta: in quibus inter cætera ait, Eum *Athenas* ire, & *Socratem* audire fuiſſe ſolitum. Quibus addi merentur ea, quæ ſcribit DIOG. LAERT. *in Vita Euclidis lib.* II. *ſegm.* 106. *Nam*, inquit, *poſt Socratis Mortem, veniſſe Platonem, ac reliquos Philoſophos, metu Atrocitatis Tyrannorum compulſos, ad hunc Euclidem Megarenſem*; à quo hoſpitio humaniſſime fuere excepti; notante STANLEJO *in Hiſtor. Philoſ. in Vita Euclid.* Ex quibus allatis verbis attendenti manifeſto apparere poſſe puto; *Euclidem Socraticum*, poſt mortem *Socratis* Præceptoris ſui, vixiſſe; ac *Platonis* tempore *Socratis* diſcipuli nomine celebratum fuiſſe; cum vero eodem Præceptore *Socrate* uſi ſunt; *Platoni* notum fuiſſe. Unde *Socraticus* noſter *Euclides Platonis* coætaneus ponitur. *Socrates* autem teſte DIOG. LAERT. *lib.* II. *ſeg.* 44. mortuus eſt anno primo Olympiadis xcv. poſtquam ſeptuaginta annos exegiſſet. Ac *Plato* annos natus duo de triginta adiit *Euclidem Megarenſem*, autore FABRICIO *Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* I. §. I. Verum

** 2 Eu-

Euclides Megarensis, ante decretum, de quo loquitur GELLIUS *loco* §. 5. *cit.* quo caverant Athenienses, qui *Megaris* civis esset, si intulisse *Athenas* pedem deprehensus esset, ut ea res ei homini capitalis esset; ante hoc decretum *Euclides Megarensis Athenis* esse, & *Socratem* audire consueverat. Quapropter suspicor clarum ac celebrem tum præ cæteris fuisse *Socraticum Euclidem*; cum *Plato* ad Eum *Megaras* venit; ac ni fallor Scholam suam jam Megaræ erexisse, cum una cum *Platone* reliqui Philosophi ad Eum confugiunt. Hinc videtur sequi *Euclidem Megarensem* quidem dicendum esse *Platonis* coætaneum, quod *Platonis* tempore adhuc in vivis esset; Verum eum *Platone* seniorem fuisse; Quocirca imprimis circa annum 400. ante Christum natum, *Euclidem Socraticum* floruisse ponendum est.

§. VII. Cognitis jam Patria, & Ætate hujus *Euclidis Megarensis*; porro ejus Doctrinas, quibus excelluit, & mores, quibus à natura donatus fuit, investigare utile nobis futurum esse existimamus. Super his rebus DIOG. LAERTIUM rogantibus, in suis scriptis respondet, *lib.* II. *segm.* 106. Eum litigiosis disputationibus cum primis addictum fuisse; ac ea propter in *Socratis* reprehensionem incurrisse: qui LAERTIO teste *lib.* II. *segm.* 30. *O*, inquit, *Euclide, sophistis quidem uti poteris, hominibus non poteris.* Ideo ab ejus contentiosa indole Secta ejus *Eristica* dicebatur; quapropter LAERT. *lib.* II. *segm.*

24.

24. in ejus Scholam ita invehit, quod ait, non σχολὴν *Scholam*, sed χολὴν *Merum fel* eam esse. Quo videntur respicere ea, quibus *Timon* illum una cum cæteris *Socraticis* mordet, quæ LAERT. *lib.* II. *segm.* 107. refert.

Non ego horum nugatorum curam gero, nec alterius
Cujusquam; non Phædonis, quisquis ille sit, nec litigiosi
Euclidis, qui Megarensibus contentionis rabiem invexit.

In argumentationibus non assumtionibus, sed conclusionibus utebatur. Disputationes ex similibus institutas penitus tollebat. Unum esse bonum ajebat, cujus diversa sunt tantum nomina, *prudentiæ* scilicet, *Dei*, *mentis*, & cætera. Conferatur STANLEJUS. *in Histor. Philos. in vita Euclidis.* Quæ è *Laërtio* allata, hujus *Euclidis* disciplinas, quibus maxime se exercuit; ac quas publice tradidit, satis manifesto declarant; quum ex iis tantum mihi colligere posse videor; Eum imprimis *Dialecticam* professum fuisse; ac discipulos suos in disputandi arte exercuisse; totumque suum studium Dialecticæ peritiæ impendisse; ac ejus rei inprimis gnarum fuisse. Quapropter, ni fallor, apud SUIDAM, *in Lexico ad vocabulum Euclides*, titulo *Philosophi Megarensis* tantum notatur; neque apud ullum Autorem reperio eum Geometriæ studium vel primis labiis

 gustasse

gustasse, vel ejus scientia imbutum fuisse. Immo SUIDAM Eum solummodo *Philosophi* nomine appellasse, non absque ratione factum esse conjicio; quia nempe apud Veteres Scriptores Græcos, è quibus *Suidas* sua collegit, tantummodo *Philosophi* nomine occurrit. Absit itaque ut Eum *Geometræ* nomine ornaremus, quum plus arti sophisticæ, quæ à quolibet Geometra quam longissime remota esse debet, quam severo rerum examini tribuisse visus sit. Porro *Laërtii* verba hujus *Euclidis Philosophi* indolem & mores haud obscure cognoscere faciunt; vehementem scilicet Eum ac litigiosum fuisse; insuper disputandi eum per cupidum adeo fuisse, ut Megarensibus contentionis rabiem invexerit.

§. VIII. Quod si ea, quæ de utroque *Euclide* reperire potui, hucusque enarrata, introspiciamus, illi, qui *Euclidem Geometram*, *Megaris* ortum fuisse sentiunt; ac propterea *Megarensem* vocant; *Geometram* nostrum, cum *Philosopho* illo *Megarico*, seu *Socratico* confundere mihi videntur. In his vero me parum, aut omnino nihil à recta via aberrare, si fontem ac originem, unde istam suam sententiam deduxere, scifscitemur; illa me persuadere videntur. Nam cum *Euclidem Geometram Platonis* tempore floruisse statuunt, & *Euclides* ille qui ad *Platonis* tempora refertur; ac propterea ab illis *Platonis* æqualis habetur, fuit *Philosophus Socraticus*, *Megaris* natus, ac educatus, disci-

discipulosque ibidem instituens; sicuti §. 5. è Veterum monumentis apparuit; ac proin cujus Patria erat urbs illa *Megara*, vel *Megara* dicta; inde ni fallor, quia haud rite à se invicem ambos distinguunt *Euclides*, in eam opinionem, affirmandi *Euclidem Geometram Megareum* esse, adducti sunt. Fundamentum itaque hujus conjecturæ in eo præcipue situm est; quod *Euclidis Geometræ Ætatem* in *Platonis* tempora incidisse opinantur. Verum observantibus VOSSIO *de Scient. Math. cap.* 15. §. 1. CLAVIO *in Proleg. in Euclid.* & DECHALES *in tract. Prooem. de ortu & progressu Mathes. pag.* 8. ad hunc errorem circa Ætatem *Euclidis* nostri committendum, omnibus præivit VALERIUS MAXIMUS *lib.* 8. *cap.* 12. scribens. *Platonis quoque eruditissimum pectus hæc cogitatio attigit; qui conductores Sacræ aræ de modo & forma ejus secum sermonem conferre conatos, ad* EUCLIDEM GEOMETRAM *ire jussit.* Ex quibus itaque collegere, *Euclidem Geometram* iisdem Temporibus cum *Platone* inclaruisse. Sed notant Viri docti ad hunc Locum, mendum esse in iis *Valerii* verbis: quippe observat PERIZONIUS quod *Mitallerius*, emendavit EUDOXUM: quoniam à PLUTARCHO appellatur *Eudoxus Gnidius* ad quem *Plato* eos oblegavit. Idem laudatur in nobis ad GELLII *lib.* 6. *cap.* 10. dicitur enim ibidem; *Meminit quidem Valerius Maximus loc. cit. Platonem quosdam ad Euclidem Geometram misisse, sed mendum ibidem latet; & recte Mitallerius in Editione sua re-*

ſtituit EUDOXUM *Geometram. Ita legendum oſtendit Plutarchus de Deo Socratis, qui in Geometrica quæſtione Eudoxi Cnidii Platonis diſcipuli meminit.* Idem ſentit MENAGIUS ad DIOG. LAERT. *lib.* II. *ſegm.* 106. ſcribens, illa lectio *Mitalleri* temporum rationi optime congruit. Vixit enim *Eudoxus Cnidius* nobilis ille Geometra iisdem temporibus, quibus *Plato*, cujus etiam auditor fuit; ſicuti ex catalogo Mathematicorum, à *Proclo* ornato §. I. colligere eſt. Quare *Valerius de vero nomine Geometræ parum ſollicitus fuerit, & Celeberrimi Geometræ nomen haud ſatis circumſpecte arripuerit.* Monente TORRENIO ad hunc locum. Obſervat porro VOSSIUS *loc. cit.* Delios ad *Euclidem Geometram* miſſos, nequidem de *Socratico* verum eſſe; ſed quod *Plato* rejecerit illud Problema ad diſcipulos ſuos. Denique PETRUS RAMUS *in Schola Mathem. lib.* I. *pag. m.* 22. 23. exiſtimat, quod hac in re major fides ſit habenda *Eratoſtheni*, qui *Euclidem Geometram* proxime ſecutus eſt; quam *Valerio:* ERATOSTHENES autem in Epiſtola quadam ad Regem *Ptolemæum*, inter cætera hæc ſcribit verba. *Aliquando vero poſt ajunt Delios graſſante morbo, ſecundum Oraculum, duplicare quandam Aram juſſos, incidiſſe in eandem anxietatem, tumque implorando Platonicos in Academia Geometras oraviſſe, ut quæſtionem diſſolverent. &c.* Quapropter hinc etiam liquido attendenti cuilibet conſtare poteſt, omnino erraſſe in nominis deſcriptione *Valerium.* Nam nec quidquam duplicati Cubi ad

Eu-

Euclidem Geometram ab Autoribus refertur; nec *Euclides* in Elementis quidquam nominatim de duplicando Cubo propoſuit. Cum itaque hæc omnia æqua lance ponderentur, nullus inficias ire poteſt; quin ille locus *Valerii* vitio laboret; nomenque *Euclidis Geometræ* ibidem delendum ſit. Verum deſtructo VALERII citato loco, corruere eorum ſententiam, qui *Euclidis Geometræ* Ætatem ad *Platonis* tempora referunt, meo judicio videtur: cum præter *Valerium* è Veteribus teſtem nullum alium pro hac opinione habent. Sed quia ex eadem conjectura manifeſto ſatis orta eſt; ea cogitatio de Patria *Euclidis Geometræ*, qua *Megaram* fuiſſe ſtatuitur; cum binos hos inter ſe confundunt *Euclides*; idcirco *Euclidem Geometram*, *Megarenſem* dicere non auderem.

§. IX. Non autem inter ſe confundendos eſſe binos hos *Euclides*, ſed à ſe invicem omnino diſtinguendos eſſe, multa ſunt quæ id ſuadent. In utroque enim *Euclide* tot characteres differentes licet reperire, qui abunde alterum ab altero diverſum fuiſſe, ſine ullo dubio palam oſtendunt. Etenim tam *Geometræ Euclidis*, quam *Philoſophi Socratici* Patriam, in qua quilibet floruit, Domicilium habuit, ac Publice Scientias docuit; ſi nobis ob oculos ponamus; ea quæ §. 2. 5. & 8. adduximus, ut utriusque eandem fuiſſe putaremus, non permittunt. Quum *Euclides*, qui Geometriam exercuit, ac publice eam profeſſus fuit, *Alexandriæ*

** 5 Scho-

Scholam ſuam habuit, ibidemque vitam degit. Alter vero *Euclides*, qui *Socratis* Auditor fuit, ac Philoſophiam publice docuit, *Megara* diſcipulos inſtituit, & erudivit, patriosque eo in oppido habuit Lares. Præterea magis eos à ſe invicem diſtinguere facit utriusque Ætas diverſa. Quippe *Socraticus* ille *Philoſophus*, Tempore *Socratis* jam erat notus. §. 6. ejusque Auditor fuit, ac *Megara* eo tempore, Philoſophiæ partem eam, quæ Dialectica vocatur, inſtituit. *Geometra* autem *Euclides* ſub *Ptolemæo Lagi* filio demum clarus fuit, §. 3. eoque tempore Geometriam docuit. A morte vero *Socratis* usque ad *Ptolemæum* primum elapſi ſunt anni xcv. monente STANLEJO *in vita Euclidis*. Quare ad minimum xc. anni effluxere, inter *Euclidem Socraticum*, & *Euclidem Geometram*; uti cenſet VOSSIUS *de Scient. Mathem. loc. cit.* Multo itaque junior fuit *Euclides Geometra*, *quam Megarenſis Euclides*. Confer. CLAVIUS *in Proleg. in Euclid.* GREGORIUS *in præfat.* COMMANDINUS *in Euclid. Elem. Proleg.* & multi alii. Porro inter illos diſcrimen licet obſervare, ſi Scholas, in quibus quilibet eruditus fuit, contemplemur. Prodiit enim *Megarenſis Euclides* è *Socratis* Schola, *Mathematicus* vero *Euclides* è Platonica. Augetur illud diſcrimen inter ambos illos *Euclides*, ſi diverſa ſtudiorum genera, in quibus ſe primo exercuere; ſi diverſas doctrinarum ſpecies, quas dein publice profeſſi ſunt, cogitemus. Fuit enim *Euclides Socraticus Parme-*

nidis

nidis librorum valde ſtudioſus, Autore LAERTIO in ejus vita, ac in diſputandi arte imprimus verſatus eſt; *Alexandrinus* autem *Euclides*, *Platonis* ac Platonicorum de Rerum Naturalium ſcientia, ſententias & rationes inveſtigavit, easque omni niſu ſtuduit, iisque percipiendis & examinandis totus incubuit; dein Geometriam adiit, eamque maxima cum laude excoluit. Docuit *Megarenſis Euclides* artem Dialecticam, in eaque ſcientia ſuos præcipue erudivit diſcipulos; Informavit *Alexandrinus Euclides* Quantorum contemplationes, & in iis ſpeculandis & rimandis Auditores ſuos occupatos tenuit. Nec parum exaggerabunt differentiam inter ambos hos homines ſtatuendam, monumenta, quibus famam ſuam longam effecere. Celebratur *Euclides Megarenſis*, quod Dialogos ſex compoſuerit, ac ſcriptis reliquerit, qui recenſentur à DIOG. LAERT. *in ejus vita*, ac ſunt ſequentes, *Lamprias*, *Aeſchines*, *Phoenix*, vel ut apud *Suidam*, *Phoenices*, *Crito*, *Alcibiades*, *Eroticus*. Laudatur *Alexandrinus Euclides*, quod ſcripta ad rem Mathematicam omnia ſpectantia compoſuerit, litteriſque mandaverit. Diſtinguuntur ulterius à ſe invicem bini hi Autores, quatenus *Megarenſis* Philoſophi tantum nomine occurrit, *Alexandrinus* autem, Geometra ubique audit. Tandem mores quibus uterque donatus erat, facile inter ambos notabilem efficient diſtinctionem. Sicuti enim natu major *Euclides* vehemens ac litigioſus fuit, ſic minor natu, *Geometra* nempe noſter

ſter ſuaviſſimi ingenii Vir fuit, ab omni contentione abhorrens. Quod ſi itaque ea, quæ in utroque obſervavimus *Euclide*, inter ſe comparemus, aſſerere neminem audere ſuſpicor, ambos illos, qui *Euclidis* nomine apud prædictos Autores veniunt, pro uno eodemque habendos eſſe; contra diſtinctas omnino fuiſſe perſonas, neutiquam inter ſe confundendas; affirmare omnes optimo jure teneri. Conſentiunt GREGORIUS *in præfat.* SAVILIUS. *in prælect. in Euclid.* CLAVIUS *in proleg.* COMMANDINUS *in proleg.* & VOSSIUS *loc. cit.* multique alii.

§. X. Præter jam dictos binos *Euclides*, *Philoſophum* nempe, & *Geometram*, alii apud Scriptores leguntur, qui nomine *Euclidis* celebrantur: quos ob nominis convenientiam hic brevibus recenſere à propoſito noſtro non alienum foret. Quorum primus eſt *Euclides Archon* qui Athenis fuit anno 2do Olympiadis LXXXVII. Secundus fuit itidem *Euclides Archon*, ſub quo triginta Tyranni expulſi, ille vixit anno 2do Olympiadis XCIV. Tertius *Euclides Athenienſis*, ſed forte non diverſus à prioribus. Quartus fuit *Euclides Vates*, *Xenophonti* amicus. Quintus *Euclides Lapicida*, cujus mentio in *Platonis* Teſtamento exſtat. Sextus fuit *Euclides* Frater *Cleomedis*, Lacedæmoniorum Regis. Septimus vocatur *Euclides Pacatianus*, cujus antidotum refertur à *Galeno* in antidotis. Octavus eſt *Euclides Platonicus*. Nonus fuit *Euclides Maximi Byz.* filius. Decimus appellatur

tur *Euclides Parasitus*, *Smicrini* filius, cognomento σεῦτλον. Undecimus fuit *Euclides Laco.* Duodecimus fuit *Euclides Rhetor*, cujus meminit STRABO *Geogr. lib.* 14. *pag.* 969. Confer. FABRICIUS *in Bibliotheca Græc. lib.* 3. *cap.* 14. §. 1. *in notis.* & STANLEJUS *in Vita Euclidis Megarensis*

§. XII. Sed missis reliquis omnibus, de *Euclide Geometra* tantum scribere nobis animus est: cujus scripta, quibus sui nobis commendaverit memoriam, recensere ordinis & instituti ratio postulare videtur. Ea vero GREGORIUS *in præfat. in Euclid.* partim è *Pappo Alexandrino*, *lib.* 7. *collect. Mathem.* Partim è *Proclo lib.* 2. *Comment. in Euclid.* collegit: eaque porro recensentur à DECHALES *in tractatu de Ortu & progressu Mathes.* CLAVIO *in Proleg. in Euclid.* FABRICIO *in Biblioth. Græc. lib.* 3. *cap.* 14. VOSSIO *de Scientiis Mathem.* multis aliis: ac sequentia enumerantur. Inter *Euclidis Geometræ* scripta, quæ partim periere, partim supersunt; *primo* numerantur *Libri tres Porismatum*; Verum hi magno rei Geometricæ, præsertim loci resoluti, damno periere. Quædam tamen eorum apud *Pappum in lib.* 7. *Collect. Mathem.* supersunt; reliqua autem hodie non exstant. *Secundo* recensentur libri duo *Locorum ad superficiem*, ad Analysim Geometricam pertinentes; hi etiam libri temporum injuria periere, præterquam quod *Pappus Alexandrinus* horum quatuor lemmata notavit. *Tertio* conscripsit *Librum*

Falla-

Fallaciarum, neque hic hodie reperitur; in eo vero rationes falsa deprehendendi, & paralogismos arguendi ostendit; quod scriptum, non sine notabili rei Logicæ ac Mathematicæ jactura, perditum est. *Quarto* composuit quatuor libros *Conicorum*, quos *Apollonius Pergæus* explevit, eisque alios quatuor libros adjecit, qui hodie sub *Apollonii* nomine leguntur. *Quinto* refert DECHALES *librum de sphæra* ab Euclide ornatum, qui cum cæteris periit. Præter hos libros perditos alii sunt, qui feliciori fato ab interitu servati sunt: inter eos tamen varii reperiuntur, de quibus valde dubitatur an quidem sint *Euclidis*. *Sexto* Euclidi tribuitur liber unicus *Datorum*, quæ ad analysin Geometricam sunt comparata, & ejus quasi Elementa Veteribus Geometris familiaria. Inter alios hunc *Datorum* librum succincte demonstratum in lucem emisit *Isaacus Barrow*; Ac olim à *Claudio Hardy* cum *Marini Philosophi* Commentario Græcè emissus, ac Latinè versus est, additis obscurioribus locis Scholiis necessariis. vid. VOSSIUS *de Scient. Math. in addendis pag. m.* 433. Idque felicius præstitit *Hardy*, quam antea *Zambertus*, qui itidem hunc *Datorum* librum Latinè vertit. *Septimo* Ei adscribuntur Tractatus duo Musici, nempe *Introductio Harmonica* & *Sectio Canonis*: dubitat autem GREGORIUS an uterque ab *Euclide* sit scriptus; qui hodie eo nomine *Euclidi* ab aliis adjudicantur: nam MEIBOMIUS eos tractatus musicos *Euclidi* tribuit; cui assentitur FABRICIUS *loc. cit.*

cit. MEIBOMIUS omnium optime in eos Commentatus eſt; eosque Volumini ſuo *Veterum Muſicorum* inſeruit. *Octavo* inter ejus Scripta occurrit liber unicus *Phænomenorum*; in quo ſolo Coeleſtia, ſive Aſtronomiæ principia attingit. Hunc VOSSIUS *loc. cit.* à *Bartholomeo Zamberto* cum reliquis quibusdam Opuſculis Latinè verſum fuiſſe, refert. Græcè & Latinè ſine Demonſtrationibus inter cætera *Euclidis* Scripta *Phænomena* edidit *Conradus Daſypodius*. *Nono* ſcripto reliquit *Euclides Opticam*, & *Catoptricam*; verum GREGORIUS & SAVILIUS multa ſe ſuadere dicunt, ad ſuſpicandum opus illud, quod hodie *Optica* & *Catoptrica Euclidis* vocatur, ſpurium eſſe; vel temporis lapſu prorſus corruptum. Interpretatus eſt *Opticam* & *Catoptricam Joannes Pena*; tum Hetruſco idiomate, ex interpretatione *Ignatii Dantis* lucem vidit hic libellus; ſed Autore *Blancano*, *Ignatii* expoſitio mutila eſt & manca. *Decimo* additur Scriptis Euclidis editis liber *de Diviſionibus*, qui latine tantum exſtat: Multi cenſent librum *Euclidis de Diviſionibus* eundem eſſe libellum Arabica Lingua ſcriptum de ſuperficierum diviſionibus, *Machometo Bagdedino* vulgo adſcriptum; qui cura & ſtudio *Joannis Dee* Londinenſis, & *Fredrici Commandini* latine verſus lucem vidit. *Savilius* autem & *Gregorius* illum libellum non *Euclidis* eſſe opinantur; conſtat tamen *Euclidem de Diviſionibus* librum ſcripſiſſe. *Undecimo* his adjungit *Gregorius*, Fragmentum, quod in *Zamberti* editione latina Euclidi addicitur; in

in quo agitur de *Levi* & *Ponderoso*; sed pro spurio id habet SAVILIUS *in prælect. in Euclid.* *Duodecimo* Scripsit *Euclides* absolutum opus *Elementorum*, cum Sole & Luna duraturum; quod plusquam 2000. annos magnam æstimationem obtinuit. De hujus editionibus & commentariis in sequentibus in specie §. 32. agere constituimus. Super his *Euclidis* Scriptis omnino legi merentur quæ de iis notarunt GREGORIUS *in præfat.* & FABRICIUS *in Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* 14. §. XI-XVI. *pag.* 377-381.

§. XII. Ex his vero omnibus Scriptis enumeratis, quæ *Euclidis* nomine veniunt, *Elementorum* librum elegimus; de quo pauca differemus, cætera silentio prætereuntes. Quippe sunt *Elementa Euclidis*, quæ præ rereliquis præcipue in omnium versantur manibus; quæque à cunctis Geometriæ studiosis nocte dieque tractentur. Sunt Elementa tantum Planorum, & Solidorum, quæ in hac editione occurrunt; de iis itaque permagni nostra interest scire, quid Autores sentiunt. *Euclidem Geometram Elementorum* opus construxisse, inter omnes, tam Antiquiores, quam Recentiores convenit Autores. Et quamvis ante Eum à diversis Elementa sint composita Geometrica, ac scriptis consignata; sicuti ex *Procli* & aliorum testimoniis constat; cum multi ante Eum inclaruere Viri, de rebus Geometricis optime meriti, non solum in Ægypto, sed etiam in Græcia, qui sua super Mathematica disci-

disciplina cogitata & inventa litteris notarunt: tamen VOSSIO teste *de Scient. Math. cap.* 14. *Euclidis Elementa* sunt opus vetustissimum quod in Geometria habemus; cum reliquorum præclarorum Geometrarum opera, temporis injuria periere. Præterea opus, quod *Elementa* inscripsit, omnium Græcorum absolutissimum est corpus principiorum Geometriæ; non obstantibus aliis Geometriæ Elementis, à diversis compositis. Quippe in Græcis primus ille fuit, qui omnia fundamenta, ad Geometriæ Scientiam ducentia, in *Elementari* suo corpore collegit; ac collecta digessit. Hac de causa depingebatur *Euclides* digitis demetiens; unde SIDONIUS APOLLINARIS *lib.* 9. *Epist.* 9. ait, *per Gymnasia pingi Euclidem, propter mensurarum spatia, digitis laxatis.* In his autem *Elementaribus* institutionibus, adornandis, non omnium Problematum, & Theorematum unicus Inventor & Autor statuendus est *Euclides*; verum aliorum Autorum tum inventis, tum scriptis, in suis Elementis componendis, usus est; quorum ea, quæ invenere, vel in ordinem redegit; vel quæ non satis valide demonstrata erant, firmissimis munivit demonstrationibus. Quapropter *Elementa Euclidea*, quo ad maximam partem, originem suam traxere, ex Scriptis Geometrarum, vel ante *Euclidis* tempora, vel iisdem temporibus inclarescentium; quæ consuluit. Ita ut hoc *corpus Elementorum* sit compositum, partim ex Problematibus, & Theorematibus ab aliis excogitatis; quæ ex

iis ſelegit, utpote ad propoſitum ſuum aſſequendum ducentia; ac quæ in convenientem ordinem redegit; vel ſi firmæ deeſſent probationes, evidentibus Demonſtrationibus confirmavit; partim ex Propoſitionibus à ſe inventis, probationibus invictis, iis additis. Quæ tamen omnia in concinnum iſtum ordinem adduxit, quo hodie *Elementa Euclidea* ſunt ornata. Etenim PROCLUS *lib.* 2. *Comment. in Euclid.* nobis autor eſt, *Euclidem* multa in ſuis Elementis ab aliis inventa collegiſſe, multa *Eudoxi* ordinaſſe, multa *Theateti* perfeciſſe; ea præterea quæ laxius à prioribus demonſtrata erant, firmiſſimis Apodeixibus, quæ nec coargui, nec convinci poſſunt, muniviſſe. Ea propter à *Proclo* aliisque Veteribus Scriptoribus κατ' ἐξοχὴν dictus eſt ςοιχειώτης, Elementorum Conſtructor, & Demonſtrator ſcilicet, ac Geometra: conferantur RICCIOLUS *Chron. pars.* 2. GREGORIUS *in præfat.* COMMANDINUS. *proleg. in Euclid.* CLAVIUS *Proleg. in Euclid.* DECHALES, *loc. cit.* VOSSIUS *loc. cit.*

§. XIII. Quod vero *Euclidis Elementa* multum debeant aliorum cogitatis, ac inventa priſtinorum Geometrarum contineant, è quibus ſunt conflata; extra omnem dubitationis aleam ponunt Propoſitiones & Demonſtrationes, quæ in ipſis Elementis occurrunt: quarum Inventores paſſim apud Veteres nominantur, quibus etiam Inventionis gloria tribuitur. Etenim celebratur

THA-

THALES MILESIUS, qui primus nomine Sapientis eſt appellatus, Eum inveniſſe Iſoſcelium Triangulorum angulos ad baſin eſſe æquales: quæ eſt PROPOSITIO 5. ELEMENTI. I. Eandem propoſitionem univerſaliorem reddidit GEMINUS· Geometra. Laudatur itidem OENOPIDES CHIUS, ob inventum illud præclare, perpendicularem nempe ad datam lineam ex puncto extra eam dato ducere; illaque eſt PROPOSITIO. 12. ELEMENTI. I. Memoratur, æqualitatem angulorum ad verticem oppoſitorum THALETEM MILESIUM detexiſſe; quam PROPOSITIONEM *Euclides* 15. ELEMENTI. I. fecit. Laus debetur EUPHORBO PHRYGI, quod modum, cujuslibet Trianguli ex tribus lineis componendi, invenerit; eaque eſt in ordine Euclideo 22. PROPOSITIO ELEMENTI. I. Quæ hanc proxime ſequitur 27. PROPOSITIO citati Elementi, inventis OENOPIDIS CHII debetur; cum Geometra ille demonſtravit ad datum punctum lineæ propoſitæ, angulo dato, æqualem angulum rectilineum conſtituere. *Dechales* autem exiſtimat, Eum non inveniſſe ipſam Propoſitionem, ſed Demonſtrationem aliquam reperiſſe. Inter THALETIS MILESII inventa Geometrica, numeratur porro æqualitas omnimoda Triangulorum, unum latus, & duos angulos ad invicem æquales habentium; quæ eſt apud *Euclidem* PROPOSITIO. 26. ELEMENTI. I. Præterea, nullus eſt, qui vel primis, ut ajunt, labiis, Geometricum guſtavit ſtudium,

vel parum ſe in eo exercuit, quin PYTHAGORÆ in Geometria merita, propter inventa ejus utiliſſima, quæ inter *Euclidis Elementa* reperiuntur, extolli admodum animadverterit. Ille enim Autor eſt, Trianguli cujuscunque rectilinei tres angulos ſimul ſumtos duobus rectis æquales eſſe; quæ eſt 32. PROPOSITIO. ELEMENTI. I. Eidem huic præclaro Geometræ acceptas referimus PROPOSITIONES. 44, 47. ejusque converſam 48. ELEMENTI. I. Quarum 47. PROPOSITIO ſpeciali notatur denominatione, ſatis indicante, PYTHAGORAM primum Autorem habere; cum *Hecatombes Pythagorici* nomen gerit, ſub eoque titulo paſſim apud Scriptores celebratur. Hujus vero denominationis originem petunt ab oblatione Boum, à *Pythagora* Muſis facta, in gratiarum actionem, pro ejus Demonſtrationis inventione. Hæc eſt illa adeo celebris Propoſitio, quæ ob ingentem ſuam utilitatem, Inventoris ſui famam immortalem reddidit. Præter has recitatas Propoſitiones in Elemento primo *Euclidis* occurrentes, aliæ etiam ſunt, quæ in ſequentibus Euclideis Elementis reperiuntur. Nam THALETEM MILESIUM, angulum in ſemicirculo eſſe rectum, inveniſſe referunt; eaque eſt apud *Euclidem* PROPOSITIO 31. ELEMENTI. III. Porro inter ejusdem THALETIS inventa variæ Propoſitiones Elementi Quarti enumerantur. Etenim tribui Ei ſolent à multis Scriptoribus PROPOSITIONES. 2, 3, 4. & 5. ELEMENTI. IV.

Qui-

Quibus addunt, Eum reperisse modum, Triangulum Æquilaterum in Circulo inscribendi; cujus inventi lætitia elatus, Bovem Musis immolasse dicitur. Porro sunt qui statuunt, QUINTUM EUCLIDIS ELEMENTUM ab EUDOXO CNIDIO esse compositum: quia EUDOXO à veteribus, de Proportionibus à se inventis, multa adscribuntur. Certum enim est è testimoniis antiquorum, EUDOXUM de Proportionibus scripsisse. Si itaque omnia, quæ in ELEMENTO V. EUCLIDIS occurrunt, non sunt EUDOXI, saltem pleraque ab ipso profecta esse, *Proclus* clare satis testatur. Quare *Euclides* ea, quæ de Proportionibus habet, ex EUDOXI scriptis hausisse, si non omnia, saltem plurima, censendus est; cum *Proclus* ait, *Euclidem* multa *Eudoxi* in suis Elementis in ordinem redegisse. Memoratur etiam THEÆTETUS, ob Demonstrationem PROPOSITIONIS. 10. ELEMENTI. X. à se primo datam. Denique quæ de SOLIDIS, tribus ultimis ELEMENTIS, nempe XI, XII, XIII. demonstravit *Euclides*, in iis THEÆTETUM, ARISTÆUM, aliosque secutum esse *Euclidem*, Autores referunt. Verum inde non derogatur, ejus laudi, quod aliorum placita consuluerit; cum inconcussis fundamentis Autorum inventa, ordine nunquam corrigendo, superstruxerit. Videantur PROCLI *Comment. in Euclid.* DECHALES *in Tract. de ortu & Progressu Mathes. pag.* 7. 8. & TAC-

QUET *in Historica narrat de ortu & progressu Mathes.* aliique plures.

§. XIV. Hoc vero Elementorum corpus, secundum multorum Doctorum sententiam, *Euclides* divisit in *Tredecim* libros; licet vulgo à nonnullis *quindecim* enumerentur Elementorum libri: immo in quibusdam exemplaribus *Sedecim Euclidis* nomen ferunt. Verum observat VOSSIUS *de Scient. Math. cap.* xv. §. 3. etiamsi multi putent Elementa hæc constare libris xv. rem tamen non ita apertam esse de duobus postremis. Ansam dubitandi de XIV. & XV. Elementis, an quidem *Euclidis* sint, præbet *Theonis* in *Euclidem* Commentarius. Etenim *Theon Alexandrinus*, *Euclidis* Elementorum valde studiosus, qui ea suis exposuit Discipulis, claruit *Theodosio Magno* imperante, anno Christi 395. mortuo, uti refert VOSSIUS *loc. cit. cap.* 16. §. 9. Ille vero *Theon* in tredecim *Euclidis* priores libros, tantum commentatus est; uti *Campani* secundum *Theonis* expositionem, Editio Elementorum *Euclidis* testatur. Qua itaque expositione in hæc Elementa manifesto indicasse videtur, Eum tredecim tantum agnovisse libros Elementorum ab Euclide conscriptos. Præterea *Marinus Philosophus*, *Procli Diadochi* discipulus, circa annum Christi 500. florens, in Protheoria ad Data Euclidis, Tredecim Elementorum libros Euclidi solummodo tribuit. Tot etiam libri reperiuntur, in Elementorum Euclidis versione Arabica *Nasiridini Tusini*

sini Persæ, quæ luculentis typis Arabicis lucem vidit Romæ anno 1594. ex Typographia Medicea. Sicuti multa alia sunt exemplaria, uti *Rhodii*, *Richardi*, aliorumque, in quibus ultimi duo nempe XIV. & XV. non reperiuntur libri. Accedit quod ultima propositio Elementi XIII. veluti colophonem operi imponit. Conferatur FABRICIUS *in Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* 14. Sed porro observandum venit, Librum decimum quartum propriam habere præfationem, quam nec primum Euclidis Elementum habet; *non vano argumento* inquit GREGORIUS *in præfat. in Elem. Euclid. duos ultimos libros alterius esse quam Euclidis.* Consentiente VOSSIO *de Scient. Math. cap* XV. §. 3. & DECHALES *in Tract. de ortu & progres. Math. pag.* 8. 9. Ex quibus abunde videtur constare, Tredecim Elementorum libros, ab Euclide tantum fuisse compositos; binos reliquos scilicet XIV. & XV. alium agnoscere Autorem. Hi vero posteriores bini libri, à quamplurimis, Commentarii HYPSICLIS ALEXANDRINI habentur. Vixit *Hypsicles* circa Tempora *Ptolemæi Lathyri* (nempe toto seculo, vel paulo ulterius, ante natum Christum.) *Isidori* summi Mathematici discipulus. VOSSIUS *loc. cit. cap.* 54. §. 7. Ipsa præfatio quæ Elemento XIV. præmittitur, est prooemium *Hypsiclis Alexandrini* ad *Protarchum*: ex quo haud difficulter colligere est, illud neutiquam convenire *Euclidi*, at bene *Hypsicli Alexandrino*, de quo in isto loquitur Prooemio. Ut cætera

tera taceam, quot verba, tot argumenta, Euclidem non esse ejus Autorem arguentia, reperiuntur. Etenim mentionem injicit scriptorum *Apollonii*; de comparatione Dodecaëdri, & Icosaëdri, eidem sphæræ inscriptorum: id neutiquam de *Euclide*, qui ante *Apollonium* scriptis inclaruit, prædicari potest; sed quidem de *Hypsicle* qui multo post vixit. Conferatur FABRICIUS *loc. cit.* Sicut etiam GEORGIUS VALLA, & BARTHOLOMÆUS ZAMBERTUS VENETUS, qui sub *Hypsiclis Alexandrini* nomine, posteriores duos Elementorum libros, latine verterunt. Eosdem ob *Hypsicle Alexandrino* compositos esse censent, SAVILIUS, GREGORIUS, CLAVIUS, DECHALES; locis jam jam citatis; & innumeri alii. Decimus Sextus Liber, qui in nonnullis codicibus, non tamen in omnibus, prioribus annectitur, nunquam *Euclidi* fuit adscriptus; licet in ordine Elementorum in Clavii Editione Euclidis Elementis annumeretur; sed ille est adjectus à FRANCISCO FLUSSATE CANDALLA; uti in fronte hujus libri à quolibet legere est. Ac ob materiæ convenientiam Elementis adjungitur, sicuti duo præcedentes libri, de simili argumento, cum Elemento decimo tertio Euclidis tractantes, propterea à nonnullis cum Euclidis Elementis XIII. connectuntur, iisque adjunguntur.

§. XV. Tredecim hi Elementorum libri, respectu Doctrinarum, quas *Euclides* de Quan-

Quantitatibus in iis pertractavit, cum CLAVIO & GREGORIO commode *in quatuor* dispesci possunt *partes:* licet bipartita divisio, in *Superficierum* & *Solidorum* contemplationem, sufficiens esset; quia PROCLUS nobis Autor est, nullam peculiarem suis in Elementis, de Punctis & Lineis tractationem instituisse *Euclidem*. Verum Solidorum *Euclidis* speculationes, de corporibus regularibus Sphæræ includendis, rite intelligi nequeunt, nisi præcesserit notitia Linearum Commensurabilium, & Incommensurabilium; cum diametri ad latus proportio non semper rationalis est. Harum vero Linearum intelligentia, Numerorum scientiam præviam ultro efflagitat; ac cum corpora illa solida, basibus planis, lateribus, & angulis planis continentur; cumque omne Solidum præsupponit Planum, ex quo Originem ducit, oportebat Doctrinam Planorum primo loco tradere: inde nata est Divisio horum Elementorum in partes quatuor. *In prima parte*, *Plana* contemplatur; quorum Doctrinam Sex prioribus absolvit libris: & quidem ita, ut Quatuor primis Elementis Plana absolute speculetur; sequente vero Elemento Quinto Magnitudinum Proportiones in genere tractat; easque Figuris nonnullis Planis in Sexto Elemento applicat. *Secunda pars*, *Numerorum* affectiones exponit, quorum notitiam tribus sequentibus libris, Scilicet Septimo, Octavo, & Nono comprehendit. *Tertia in parte*, *Summetriam*, sive de Lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus

 Scien-

Scientiam docet, hancque unico, Decimo nempe libro complexus eſt. *Quarta* denique *in parte*, *Stereometriam*, ſeu ſolidorum doctrinam examini ſubjicit, eorumque contemplationem tribus ultimis libris, Undecimo, Duodecimo, & Decimo tertio, proponit ac demonſtrat. Quibus peractis cum ultima propoſitione Libri Decimi tertii Elementa ſua claudit.

§. XVI. Continent hi libri in ſe principia & fundamenta ad Geometriæ intelligentiam ſcitu neceſſaria; ſicuti ſingulorum librorum contenta quemlibet attentum facile docere poſſunt.

Etenim *primo in libro*, Triangulorum; omnium figurarum planarum ſimpliciſſimarum & primarum ortus, affectionesque primum *Euclides* conſiderat; tum juxta angulos, tum juxta latera ipſa inter ſe comparans; quibus ſubjungit anguli & lineæ biſectionem; addens perpendicularis conſtructionem; angulos rectos, obtuſos, acutos, deinceps-poſitos, adverticem, externos, internos. Dein linearum æquidiſtantium proprietates inveſtigans, ad ipſa deſcendit parallelogramma ex iis nata; eorum ortus, & ſymptomata, quæ illis inſunt, declarat. Porro Triangula cum parallelogrammis comparat, ac quonam pacto parallelogrammum æquale fiat Triangulo aſſignat. Tandem in Triangulo Rectangulo quadrati, quod à latere rectum angulum ſubtendente, deſcribitur, cum quadratis, quæ à reliquis lateribus fiunt, proportionem inveſtigat. In

In *secundo libro*, parallelogrammi rectanguli, gnomonisque definitionem tradit; lineæque divisæ, quanta sint quadrata ostendit; illaque cum parallelogrammis segmentorum confert; dein quadratorum, quæ à lateribus triangulorum obtusangulorum, & acutangulorum describuntur, proportiones cum quadratis, quæ fiunt à subtendentibus angulum obtusum & acutum, expendit. Denique ostendit qua ratione construatur quadratum rectilineo dato æquale. Hujus libri propositiones, præter linearem, qualem in plerisque codicibus habent, demonstrationem, etiam decem priores in numeris demonstrari possunt; quod jam olim præstitit *Barleamus Monachus*, ac post linearum demonstrationem in commentario suo numeralem subjungit *Clavius*. Nonnulli per Algebram speciosam easdem resolvunt, uti *Sturmius* in *Archimede Germanico*, aliique.

Tertius liber, agit de iis, quæ circulis accidunt, ac de rectis lineis in circulo vel ad circulum ductis; itemque angulos tam ad circulorum centra, quam ad peripherias constitutos rimatur; ultimo æqualitatem angulorum æqualibus arcubus chordisque insistentium demonstrat.

Quartus qui subjungitur *liber* quasi tertii praxis est, figurarum planarum, Trianguli, Quadrati, Pentagoni, Hexagoni, Quindecagoni inscriptiones in circulo, & circumscriptiones docens.

Quintus qui sequitur *liber* Magnitudinum Proportiones generales tradit; modosque argu-

argumentandi quosdam, in proportionibus apud Geometras frequentissime usitatos: alternam seu permutatam rationem, inversam, compositionem, divisionem, conversionem, ex æqualitate ordinatam ac perturbatam; firmos ac validos esse ostendit.

In sexto libro, proportiones figurarum planarum commonstrat, ostendens Phænomena Triangulorum proportionalium, æqualium, similiumque; sectionem lineæ in tot, quot, volueris, partes; inventionem tertiæ, quartæ, ac mediæ proportionalis; rationes figurarum reciprocarum, & parallelogrammorum ad se invicem, nec non polygonorum, parallelogrammorum applicationes ad rectas lineas, quæ vel deficiunt parallelogrammis similibus, vel excedunt: porro quomodo recta linea terminata extrema ac media ratione secetur; ultimo proportiones circumferentiarum, angulorum, ac sectorum in circulis æqualibus inquirit.

Septimus liber, numerorum indicat proprietates, in eo agitur de numeris primis & compositis; & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura invenitur; de numerorum parte, & partibus; de numeris multiplicibus, de proportionalibus, & quæcunque in libro quinto de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonstrantur.

Octavus liber, numeros deinceps proportionales, numeros planos, quadratos, cubos, & solidos; similes planos, atque similes solidos indicat.

Nonus

Nonus, numeros similes planos, cubos, solidos, numeros deinceps proportionales, sive ab unitate, sive simpliciter; numeros primos, numeros pares, impares, pariter pares, pariter impares, numeros perfectos declarat.

De hisce tribus numerorum libris, qui Arithmeticorum vocantur, dissentiunt inter se Viri Docti. Quidam putant *Euclidem* in iis plus præstitisse, quam ejus præstare fuit intentio; ac ex iis profluxisse quidquid hactenus de numeris scitur, aut deinceps sciri potest; quam sententiam amplectitur TACQUET *in præfat. Arithmeticæ suæ.* Quidam vero contendunt, *Euclidem* tantum de Arithmetica iis in libris tractasse, quantum rei Geometricæ inservit; ut planius ac plenius commensurabilium & incommensurabilium demonstrationes fieri possent: inter quos CLAVIUS, RHODIUS, FRANCISCUS FLUSSAS CANDALLA; scribit enim CLAVIUS *ad Def.* 1. *Elem.* 10. *Absolvit Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas*; idem sentit FLUSSAS *in præfat. in lib.* 7.

Decimus liber, magnitudines commensurabiles & incommensurabiles, itemque rationales & irrationales explorat.

In Undecimo, tandem ad Stereometriam devolvimus, in qua pertractanda, eodem quo in planis processerat, usus est modo; à simplicissimis, Geometrarum more incipiens, lineis scilicet, quatenus ad corpora soli-

ſolida referuntur; quando in uno plano poſitis, iisque ad planum vel rectis, ſeu perpendicularibus, vel parallelis; item de planis ſeſe mutuo ſecantibus; quomodo à puncto in ſublimi dato ad planum perpendiculares ducuntur; denique diſſeruntur tum de planis, tum de ſolidis angulis, de parallelepipedis, & priſmatibus æqualibus nonnulla.

Duodecimus, ac ſolidorum ſecundus liber, doctrinam de corporibus fuſius perſequitur, in eo priſmata & pyramides, cylindri & coni invicem comparantur, ſimulque edocet inſcriptionem polygoni in circulo, & Polyedri in ſphæra; ſphærasque triplicatam ſuarum diametrorum habere rationem.

Decimus Tertius, corporum regularium quinque, ſeu Platonicorum dictorum, conſtitutionem contemplatur, ea corpora quidem Platonica appellantur, à Pythagora vero jam defecta ſunt, uti patet ex veteri Epegrammate *in Synopſi Geometrica* MICH. PSELLI allegato,

Σχήματα πέντε Πλάτωνος, ἁ Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε.
Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε, Πλάτων δ' ἀριδηλ ἐδίδαξεν.
Εὐκλείδης επι τοῖσι κλέος περικαλλές ἔτευξεν.

hoc eſt,

Figuræ quinque (ſunt) Platonis, quos Sapiens Pythagoras invenit.
Pythagoras ſapiens eas invenit, Plato vero manifeſte docuit.

Eu-

Euclides super his gloriam splendidam struxit.

Conferatur GREGORIUS *loc. cit.* Ad horum corporum evidentiorem intelligentiam præmittuntur quædam de lineis extrema ac media ratione sectis, subsequuntur relationes Pentagonorum, Hexagonorum, Decagonorum, triangulorum regularium circulis inscriptorum: tandem Pyramidem, Octaëdrum, Hexaëdrum, Icosaëdrum, ac Dodecaëdrum construere assignet, horumque corporum latera proponit, eaque inter se componit.

Decimus Quartus, & *decimus quintus* libri, qui licet in nonnullis exemplaribus *Euclidis* nomine veniunt, HYPSICLIS ALEXANDRINI esse videntur; simile tamen fere tractant argumentum. In *quarto decimo* enim comparantur Dodecaëdrum, & Icosaëdrum in eadem sphæra descripta. *In quinto decimo* quinque corpora indicata inscribuntur, ac eorum latera & anguli inveniuntur.

Decimus sextus, liber à CANDALLA adornatus, quique aliquando præcedentibus annectitur, varias solidorum regularium, sibi mutuo inscriptorum, & laterum eorumdem comparationes explicat. Conferantur COMMANDINI *in Elementa Euclidis Prolegomena*, circa finem; & GEORGE MATHIAS BOSE *in Scediasmate literario de contentis Elementorum Euclidis.*

§. XVII. Hanc per Elementa distributam, materiam convenienti *Ordine* ac *Methodo* dispo-

diſpoſuit *Euclides*; in quo indagando, eum, quo *Euclides* ipſe uſus eſt, cum primum, ad hanc doctrinam ſpeculandam ſeſe accingeret, puto deſtinguendum eſſe ab illo, quem jam in illis Elementis tenemus. Quando, enim mecum reputo *Euclidem* ſibi Scopum & Finem conſtituiſſe, corporum mundanorum conſtitutionem ſpeculationi ſuæ ſubjicere; inde haud obſcure colligere mihi videor, primo intendiſſe eum, ac ſibi ad contemplandum propoſuiſſe *Elementum decimum tertium*; nempe quinque corpora regularia Platonica in eandem includere ſphæram, quæque eorum invicem ſit proportio, demonſtrare. Ad quod autem præſtandum, neceſſe ei fuit extremas illas de corporibus regularibus propoſitiones in ſimpliciores, cauſas & principia earum propoſitionum continentes, ſemper reſolvere; atque hac methodo pedetentim ad prima tandem devolvere principia. Cum vero Methodus Analytica eſt, quæ rem in ſua principia ſive Elementa, & concluſionem quamcunque in propoſitiones, quæ continent cauſas & principia concluſionis reducit; inde manifeſto cuilibet apparere ſuſpicor, *Euclidem* omnium primo *Methodo Analytica* proceſſiſſe in ſuis Elementis adornandis. Nos autem qui iis utimur Elementis, quando eorum auxilio ducimur, ad Propoſitiones in iis propoſitas demonſtrandas & intelligendas, à principiis ejus incipientes, & gradatim ad ultimas usque adſcendentes; cumque ſic ex princiis, ad id, quod ex iis ſit, progredimur;

mur; *Methodum* ſequimur *Syntheticam*. Quod vero ipſam ſpectat diſpoſitionem eorum, quæ per hæc diſtribuit Elementa, ſciendum omnino eſt; ſanas omnes Scientias certa quædam & definita habere principia, ex quibus ea, quæ ſequuntur demonſtrant. Quare rite diſtinguendum eſt inter id, quod principiorum fungitur officio, & id, quod à principiis iis fluit; & quidem eo magis, quod principia Scientiarum debent eſſe per ſe clara, & evidentia magis quam quæ ex iis derivantur. Cum per ſeſe ſibi fidem faciunt, nulla principiorum reddenda eſt ratio; Quæ vero Principia conſequuntur omnino rationibus confirmanda; quippe illa deinceps per principia prius intellecta cognoſcimus. Hæc enim qui inter ſe confundit, & principia cum iis, quæ ab his fluunt, commiſcet, is totam perturbat cognitionem; ea conjungens quæ nullo modo inter ſe conveniunt. Hac de re probe edoctus *Euclides* in ſuis Elementis componendis, ſeorſum & principia, & quæ ea ſequuntur pertractavit; talia ſtatuens principia, quæ ob evidentiam ſuam per ſeſe fidem mereant, nulla eorum adhibita demonſtratione. Eaque præmiſit vel generalia ad omnia Elementa ſpectantia, vel ſingulis libris propria; quæ in fronte ſuorum librorum collocavit. E quibus præviis dein rationes petit eorum quæ principia conſequuntur; cum Propoſitionum demonſtrationes ex iis hauriens, probatam præcedentem, ſequentis demonſtrandæ principium ſtatuit;

talique ordine Elementarem suam disposuit Institutionem.

§. XVIII. Ipsa autem *principia* quod attinet, quæ *Euclides* posuit fundamenta, quibus Geometriæ Doctrinam superstrueret, in tria divisit genera; *Definitiones*, *Petitiones seu postulata*, & *Axiomata* seu *communes notiones*. In *Definitionibus* vocabula artis exponit, seu quem sensum fundet hoc vel illud vocabulum, in iis declarat; ac Geometrarum more vocis explicatione semel indicata, eadem semper significatione per totum Elementare corpus utitur: ne dein eorum ambiguitate aut obscuritate circumventi, in falsas incidamus conclusiones. Tales vocum Expositiones singulis Elementorum libris, ad ejus intelligentiam pernecessariarum, ac ad unumquemque librum proprie respicientium, præmisit. *Postulata*, quæ & alias *Petitiones* dicuntur, sunt, quibus aliquid admitti petimus, quod perfacile fieri potest: eaque sunt adeo clara & perspicua in his Elementis, ut nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcunt; ne ulla sit in Demonstratione hæsitatio, aut difficultas. Tria suis in Elementis posuit Postulata *Euclides*, quibus id tantum intendisse videtur, ut ipsi concederetur usus Regulæ & Circini, ne dein de schemate eorum ope facto, quasi non sit Mathematicum, lis moveretur. Inde factum est, quod nulla *operatio Mathematica* creditur, nisi quæ per hæc instrumenta, nullo alio adhibito adminicu-

niculo mechanico, instituatur; quæ vero figurarum delineatio aliis indiget instrumentis, *operatio Mechanica* dicitur. *Axiomata* vero quæ & *communes notiones* sæpe audiunt, sunt propositiones seu enunciationes potius per se manifestæ, cognituque perfaciles, quæ sine ulla demonstratione à quolibet concedi, & communi consensu assumi debent. Verum postulata inter & axiomata hoc intercedit discrimen, quale inter Problema & Theorema: ac sicuti in Problemate operatio fit, ita in Postulato; sicut in Theoremate aliquid contemplationi subjicitur, ita in axiomate. Hæc bina ultima principiorum genera universaliter toti præmittit Elementorum Systhemati, non autem peculiariter cuilibet eorum libro; confer. CLAVII *Prolegomena in Euclidis Elementa*.

§. XIX. Hisce Principiis præmissis ad ipsam rem sese accingit, ac aliquid tum ad faciendum, tum ad contemplandum adducit; idque *Propositiones* vocat: quas in duas distinguit species, alteram *Problema*, *Theorema* alteram nominat. *Problema* apud Mathematicos est Propositio, qua aliquid facere & operari jubemur; vel ad similitudinem Problematis Dialectici, in qua utraque contradictionis pars vera aut falsa esse potest. Sic quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid jubent construere, & cujus contrarium etiam effici potest, Problema appellatur. Vel secundum *Commandinum*, Problema illud est, in quo quippiam,

 cum

cum primum non ſit, proponitur inveniendum, ac conſtruendum. Uti ſupra rectam lineam finitam Triangulum æquilaterum conſtituere, Problema eſt. In omni Problemate duo notanda veniunt; *Datum*, & *Quæſitum:* ſic in aſſignato Problemate, datum eſt, recta linea finita; quæſitum, trianguli æquilateri ſuper datam lineam conſtitutio. Problematum tres ſpecies Veteres ponunt Mathematici, *Planum*, *Solidum*, & *Lineare*. *Planum* dicitur, quod per rectas lineas & circuli circumferentiam ſolvi poteſt. *Solidum* eſt, ad cujus reſolutionem Sectiones Conicæ requiruntur. *Lineare* denique, quod præter jam dictas lineas alias etiam ad ſui conſtructionem deſiderat. Ex his vero tribus Problematum ſpeciebus, prima tantum in Elementis Euclideis reperitur, omiſſis duabus reliquis. Problemata Euclidis duplicia ſunt, vel *determinata* vel *indeterminata*. *Determinata* ſunt, propoſitiones quæ cum reſtrictione fieri poſſunt, uti eſt 22. *Elementi* I. Ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere; ubi additur hæc reſtrictio; oportet autem duas reliqua eſſe majores omnifariam ſumtas. *Indeterminata* ſunt propoſitiones, quæ univerſaliter fieri poſſunt. *Theorema* eſt Propoſitio ad contemplandum propoſita, quæ paſſionem aliquam, proprietatemve unius, vel plurium ſimul quantitatum edit; ſicuti Propoſitio hæc, quod in omni Triangulo rectilineo tres anguli ſimul ſumti ſunt æquales duobus rectis, non jubet aut

aut docet triangulum vel aliquid conſtruere; ſed ſolummodo Trianguli cujuslibet conſtituti, paſſionem hanc comtemplari proponit; quod anguli illi ſint duabus rectis æquales: unde à contemplando talis Propoſitio Theorema dicitur. Ideo Theorema, definiente *Commandino*, eſt in quo quippiam in conſtituta jam figura ita eſſe, vel non eſſe demonſtratur. In Theoremate duo etiam notanda veniunt, *antecedens* & *conſequens*; *Antecedens* dicitur id, quod conditiones proponit; & iis admiſſis, id, quod inde evenit, *Conſequens* dicitur. Uti in 5. *prop. Elem.* I. Antecedens eſt, anguli ad baſin triangulorum Iſoſceliorum conſtituti; Conſequens, ſunt inter ſe æquales. Hæc Theorematis bina membra ſæpiſſime nomine *datorum* & *quæſitorum* occurrunt; quod prius dari ſeu concedi antecedens debeat, quam in ſequentis veritatem inquiri poſſit. Inſerunt aliquando Geometræ Theoremata vel Problemata minus principalia, ut alia brevius demonſtrari poſſint, eaque *Lemmata* vocant; quæ dici poſſunt demonſtrationes ſeu conſtructiones illius, quod ad demonſtrationem, alicujus Theorematis vel Problematis principalis aſſumitur, ut demonſtratio expeditior fiat ac brevior. Interdum ſubjungunt *Corollaria* vel *conſectaria*, quæ ſunt propoſitiones, immediate ex præcedenti demonſtratione lucem accipientes, quæque peculiari demonſtratione non egent. vid. CLAVIUS *Prolegomena in Euclidem*, & REYHERUS *in diſſert. de Euclide. cap.* 4.

§. XX. Propositis Quantorum proprietatibus, earum *Demonstrationes*, quibus certo constat, rem in Propositione indicatam principiis positis convenientem esse, subjungunt cum *Euclide* Mathematici. Verum ut Demonstrationum adornatio facilior evadat, quædam demonstrationi ipsi, ex quibus plurimum lucis sæpe foenerantur ea, quæ demonstrationi inserviunt, Geometræ præmittunt. Etenim in Theorematibus, recitatis iis in propositione propositis, enumeratisque datis ac quæsitis rerum indicatarum, priusquam proposita demonstranda suscipiunt, *præparationem* quandam instituunt, qua propositionis propositæ Schema illustratur. In Problematibus vero, iisdem, ac in Theorematibus, prius recensitis, eorum *constructionem* efficiunt; ac, ut demonstratio legitime fieri possit, quandoque etiam *præparationem* addunt. Quibus omnibus rite peractis, eorum, quæ proponuntur, ipsam demonstrationem incipiunt Geometræ. In Demonstrationibus suis instituendis duplici Methodo procedunt Geometræ, vel *directe* demonstrant ea, quorum in propositionibus fit mentio, vel *indirecte*. *Directa Demonstratio* quæ & *Ostensiva* appellatur, ea est, in qua aliquid probatur & scientifice cognoscitur, à principiis, tanquam causa ad effectum procedendo; eaque in scholis vocatur *demonstratio à priori*, quia causa effectu prior est. Ejusmodi probatio vera est, & proprie dicta demonstratio, quæ per se directe

recte ad ſcientiam ducit. *Indirecta*, ſive ad *incommodum*, vel *impoſſibile* ducens, eſt, quando contrarium propoſitionis demonſtrandæ aſſumimus, idque cum ipſa propoſitione conjungimus; ut fiat ſyllogiſmus concluſionem inferens, quæ cum principio quodam pugnat, adeoque contrarium propoſitionis falſum eſſe evincit; eaque eſt *à poſteriori*, quia effectum, id eſt Hypotheſin adverſarii primo loco ponit, eamque examinat. Hæ binæ demonſtrationum ſpecies ſi juxta æquam lancem ponderentur, plus roboris directæ demonſtrationi ineſſe quemlibet facile concedere ſuſpicor, modo penſitet ex principiis evidentibus apta idearum connectione, oſtenſivam petitam eſſe probationem. Verum ubique talis demonſtratio oſtenſiva haberi nequit, in quo caſu ad incommodum ducentibus argumentis utendum eſt; ubi vero directæ inſtitui poſſunt Demonſtrationes, illæ multum præferendæ ſunt; ac indirectis abſtinendum eſt. Ambo hæc Demonſtrationum Genera ſuis in Elementis adhibuit *Euclides*; cum hoc tamen diſcrimine quod longe pluribus uſus fuerit oſtenſivis; ubi autem commode directas habere non potuit apodeixes, indirectas ſeu ad abſurdum ducentes dedit demonſtrationes. Quod nullo modo *Euclidi* vitio vertendum eſt, cum eo loco tantum ad impoſſibile ducentes inſeruerit; ubi commode directam demonſtrationem tradere non potuit; videatur REYHERUS *in diſſert. de Euclid. cap.* 4.

§. XXI. *Laudatur* valde à Viris Doctis *ordo*, ac veritatum, ad Geometriæ intelligentiam inde hauriendam, *selectus*, quem in Propofionibus fuis difponendis tenuit *Euclides*. Etenim PROCLUS *in commentario fuo in Euclidem lib.* 2. *cap.* 5. ordinem ac delectum eorum, quæ Euclides per Elementa diftribuit Theorematum atque problematum, extollit, cum illum quempiam admirari debere ait; *non enim* (addit) *ea affumfit omnia, quæ poterat dicere, fed ea duntaxat, quæ Elementari tradere potuit ordine: adhuc autem omnis Generis fyllogifmorum modos, alios quidem à caufis fidem fufcipientes, alios vero à certis notis profectos, omnes autem invincibiles, & certos ad fcientiamque accommodatos, adduxit.* Quod fi COMMANDINUM *in proleg. in Euclidis Elem.* audiamus: *Nonne*, dicit infignis ille Mathematicus, *quilibet fummopere admiretur Euclidem propter ordinem in hac Elementari inftitutione; cum admirabili omnium difpofitione, antecendentium & confequentium ordine, ac cohærentia, ut nihil prorfus addi, aut detrahi poffe videatur*, ea inter fe vinculo indiffolubili connexuit. Pariter celebris ille Aftronomus TYCHO *in Oratione de difciplinis Mathematicis*, de Euclidis Elementis differens, Difpofitionem Elementorum Euclidis debita fua laude defcribit; *Euclides enim*, ait, *Elementa continuo ordine, & magna folertia ita tradidit, ut à quovis mediocris ingenii acumine prædito non difficulter percipi poffent.* Quibus addi merentur quæ BLANCANUS

in sphara mundi & quidem *in apparatu ad Mathematicas scientias pag. m.* 207. scribit. *Inter Mathematica monumenta primum est Euclidis opus Elementorum, non tantum antiquitate & dignitate, verum etiam Doctrinæ ordine: est enim totius Matheseos basis & fundamentum.* Laudabilis porro iste est ordo à doctrinæ compendio, quod neque propositionum multitudine luxuriat, neque earum paucitate sui studiosis obscuritatem creat. Cum ex iis Elementis Geometricam scientiam liquido nobis comparare possumus: qua de re GREGORIUS *loc. citato* Quærit; *Nullane igitur est Methodus compendiosior ad Geometriam addiscendam, quam hacce per Euclidis Elementa quam adeo reformidant plerique? Huic certe quæstioni respondeat ipse Euclides. Ille à Ptolemæo Ægypti Rege interrogatus, an via esset aliqua ad Geometriam, magis compendiaria sua* στοιχειώσει, *respondisse fertur autore* PROCLO *in lib.* 2. Μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν. Verum quantumvis elegans & præclarus iste est ordo, attamen taxatur à nonnullis; scribit enim de eo CLAUDIUS VERDER. *in Auctorum Censione; Euclidem esse indigestum & incompositum, cum enim ab universalioribus processus fieri debebat, ne vitiosa sit repetitio, pessime à Geometria auspicatus est initium; quam post Arithmeticam tractare oportuit.* Eandem de Euclidis Elementis fovet sententiam famosus Euclidis oppugnator PETRUS RAMUS, *in Schola sua Mathematica*, & cum RAMO, LAZARUS SCHONERUS, qui *Euclidis* ordinem & selectum valde carpunt, sed

monente VOSSIO *de Scientiis Mathemat. cap.* 16. §. 24. *Hi modum non tenuere in Euclide culpando.* His vero reponimus quæ GREGORIUS *in Præfat. sua Euclidi præmissa* hac de re scribit; *Hanc esse optimam veræ Methodi Legem existimavit vir accuratissimus, ut nihil sumatur pro vero nisi demonstratum; nihil demonstretur nisi ex antecedentibus. Quo fit (inquit* SAVILIUS) *ut ordo, quem isti Methodistæ requirunt ab Euclide, quo nunquam vidit hic sol μεθοδικώτερον, servari non potuerit, nisi si quis est adeo ineptus, ut nescio cujus imaginariæ venustatis rationem habendam putet, neglecta sanitate. Quivis eorum, qui Geometriæ Elementa alia Methodo tradenda suscepit, inter Euclideum opus alteriusque cujusvis præter proprium judex constituatur; illico patebit discrimen.*

§. XXII. Verum quantumvis apta veritatum dispositione illa cohærent Elementa, quæ vulgo *Euclidis* nomine veniunt; dubitant nonnulli an quidem ea Euclidi sit ad scribenda Gloria, cum illa Elementa, quæ hodie in omnium versantur manibus, *Euclidem* Autorem habere negant. Sed ea à THEONE ALEXANDRINO, qui Senioris THEODOSII temporibus floruit, profecta esse affirmant. Saltem PETRUS RAMUS in diversam à longe plurimis Viris Doctis hac in parte abit sententiam; Propositiones in Elementis Euclideis occurrentes, non *Euclidi* sed *Theoni* adscribens; quasi nullæ forent partes *Euclidis* in iis Elementis, quæ tamen vulgo *Euclidi* tribuuntur. Verum hæc

Rami

Rami opinio Veterum Mathematicorum Testimonio repugnat; cum omnis Antiquitas eas *Euclidis*, & non cujusdam *Theonis Alexandrini*, esse propositiones agnovit. Qua de re HENRICUS SAVILIUS *in prælectionibus in Euclidem* Scribit, *quod eadem hæc quæ nunc habemus, eodem ordine, iisdem verbis, agnoscunt sub Euclidis nomine Proclus & Boëtius Theone posteriores, & Anterior Theone Alexander Aphrodiseus, & omnis antiquitas.* Quare nullum superesse dubium potest, quin *Euclides* Propositionum quæ in Elementis obviæ sunt, Autor sit habendus, licet *Proclus* nullum referat *Euclidis* inventum; uti RAMUS scribit.

§. XXIII. Alii vero, qui parum liberaliores sunt, Propositiones ab *Euclide* factas compositasque esse asserunt, sed Demonstrationes *Euclidi* abjudicant; hac forsan de causa in errorem abducti, quod in nonnullis codicibus græcis, soli traduntur propositionum tituli cum figuris, sine ulla demonstratione, referente DECHALES *de Progressu Matheseos. pag.* 9. *col.* 1. His respondet HENRICUS SAVILIUS, dicens; *homines stulti & perridiculi; quasi ullus unquam artifex suas edi voluerit conclusiones, nullis adjectis probationibus. Hoc neque Philosophorum quisquam, nec Medicorum, ne dum Mathematicorum, fecit unquam.* Quanto minus de Mathematicorum Principe id suspicandum. Immo testis est JOANNES DE BUTEON *in suis annotationibus in Euclidem*, quod apud antiquos nun-

nunquam ſine demonſtratione Theoremata proferebantur; ut quæ nullam, ſi nudæ fuerint, habeant utilitatem ac dignitatem. vid. COMMANDINUS *in proleg.* conferatur GREGORIUS *in præfat.* & VOSSIUS *de Scientiis Mathematicis. cap.* 15. §. 9. Cum his etiam ſe conjungit PETRUS RAMUS, qui non contentus Propoſitiones omnes *Euclidi* ſubtrahere, & *Theoni* vindicare, verum etiam Eum Demonſtrationibus omnibus defraudare, easque in *Theonem* conferre omni ſtudio nititur. Ita ut ſecundum RAMUM, *Euclides* in Elementis nihil præſtiterit, ſed omnia *Theon.* Quam ſuam ſententiam, variis rationibus probabilem reddere ſtuduit, in ſuo *Matheſeos prooemio.* Et quidem *primo*, quod *Proclus* commemorat, Demonſtrationes ab *Euclide* eſſe inventas, verum non refert inter *Euclidis* laudes ullam propoſitionem vel demonſtrationem ab *Euclide* eſſe inventam. *Secundo*, THEON ipſe ſuas editiones in Elementa nominatim laudavit, *in primo commentario. in Ptolemæi magnam conſtructionem*, quo ſibi vindicare videtur *Theon* ipſa Elementa. *Tertio*, quia *Euclidis* demonſtrationes, quæ in *Procli* commentariis leguntur minime cum iis conveniant, quas in Elementis habemus. *Quarto*, quia *Euclidis* Elementorum codicibus quibusdam, hæc adduntur verba in inſcriptionibus, εκ των Θεωνος συνουσιων, id eſt ex *Theonis colloquiis ſive congreſſibus*; ſicuti codex græcus *Euclidis Elementorum*, qui prodiit *Baſileæ apud Joan. Heruagium Anno.* M. D. XXXIII. inſcribitur Ευκλειδȣ Στοιχειων βιβλ. ιε. εκ των

Θεωνος

Θεαίτητος συνουσιῶν. Quæ ſane verba multis occaſionem de Euclideis demonſtrationibus diſputandi dedere; multisque anſam præbuere credendi, Demonſtrationes Propoſitionibus *Euclidis* annexas ad *Theonem* pertinere. Licet vero *Proclus* non diſertis verbis expreſſerit, quasnam *Euclides* invenerit Propoſitiones, & Demonſtrationes, tamen manifeſte ſatis mentem ſuam declarat, multum inveniſſe *Euclidem*, quando de eo ſcribit, quod multa ab *Eudoxo* collecta in ordinem redegerit, ac à *Theateto* inchoata perfecerit, quæ mollius ab aliis demonſtrata erant, ad firmiſſimas & certiſſimas apodeixes revocaverit. Quæ omnia profecto ſine multarum propoſitionum & demonſtrationum inventis præſtari nequeunt. Secundam quod attinet rationem; verum eſt *Theonem* in *Commentario in Almageſtum*, provocare ad Elementa à ſe edita; *quod vero ſectores*, inquit, *in circulis æqualibus ſint proportionales angulis ad centrum conſtitutis, oſtenſum eſt à nobis in editione Elementorum*, ἐκδόσει, *ad finem ſexti libri.* Ex quibus verbis, & novam Elementorum editionem adornaſſe *Theonem* conſtat, & nonnulla ab ipſo adjecta; non autem quod ille autor fuerit, demonſtrationum omnium in Elementis obviarum. vid. GREGORIUS *in Præfat. Euclidis Element. præmiſſa.* Tertiam perpendentes rationem, diſcrimen demonſtrationum indicantem, non tanti ponderis ea eſſe videtur, ut propter eam *Euclidem* ex Elementis exterminaremus. Etenim idem diſcrimen in aliis *Euclidis* ſcriptis reperitur, de quibus non

non controvertitur, an sint Euclidis, cum omnium consensu communi Euclidis scripta esse judicantur. Sic Data *Euclidis* non eodem prorsus habentur modo, quo apud PAPPUM *in septimo Mathematicarum collectionum libro*. Nec Optica, Catoptrica, quæ Romæ in Vaticana Bibliotheca servantur, teste COMMANDINO *in proleg. in Euclid.* Quid itaque foret causæ, cur Elementorum Demonstrationes Euclidi abjudicaremus, cum cætera Scripta eodem discrimine laborantia, ei adjudicaremus? Sane si dicendum, quod res est; est nodum in scirpo quærere. Nec majoris momenti est quarta denique & ultima ratio, cum hæc verba εκ των Θεωνος συνουσιων in multis codicibus græcis non extant; immo Autor est SAVILIUS quod hujus tituli in neutro codicum MSS. ullum reperit vestigium. Quare quæ *Joannes Boteon* de his verbis observat, veritati maxime consentanea esse videntur; cum verosimile esse putat verba illa εκ των Θεωνος συνουσιων ita intelligenda esse, ut dicamus, *Theonem* conscripsisse quidem commentarios in Elementa, sed illos temporum calamitate periisse; quemadmodum quæ in Eundem *Pappus Alexandrinus* scripserat, conservato tamen titulo, qui postea *Euclidi* ipsi negligenter adjectus est. confer. COMMANDINUS *in Proleg. in Elem. Euclid.*

§. XXIV. Denique multi alii, & Propositiones, & Demonstrationes Elementorum, pro ut nunc ab omnibus teruntur, *Euclidi* attribuunt,

buunt, quæque aut vera eſt, aut ſaltem veritati proxima ſententia. Graves enim & ponderoſæ ſunt rationes, quæ pro hac ſententia pugnant. Etenim PAPPUS ALEXANDRINUS, qui fere eodem ac *Theon Alexandrinus* tempore floruit, nobis autor eſt *in ſeptimo libro Colleſt. Mathem. pag. m.* 240. *Euclidem* Elementa tradidiſſe. Ipſe porro PAPPUS ſæpe comparat demonſtrationem ab *Euclide* traditam, cum aliorum demonſtrationibus: quod ſane fieri non potuiſſet, niſi *Euclides* & propoſitiones & Demonſtrationes ſcriptis reliquiſſet. Accedunt, quæ PROCLUS, qui longe poſt *Theonem Alexandrinum* vixit, *in comm. in Euclid.* de Demonſtrationibus Euclideis ſcripſit; cum enim in commentariis in propoſitionem decimam retuliſſet *Apollonii Pergæi* demonſtrationem, hæc ſubjungit verba, *longe melior eſt* ϛοιχειωτὸν, (ita enim *Euclidem* appellat) *Demonſtratio, & ſimplicior, magisque ex principiis.* Ex quibus verbis manifeſto colligimus, *Euclidis* Elementa poſt obitum *Theonis Alexandrini* ſcriptis divulgata fuiſſe. Porro DECHALES *in Tract. de progreſſu Matheſ. pag.* 12. expreſſis verbis ſcribit, quod *Proclus* & *Boëtius*, *Theone* poſteriores nonnullas Demonſtrationes referunt, prout in ipſo *Euclide* jacent; ac VOSSIUS *de Scientiis Mathematicis, cap.* XV. §. 9. cum retuliſſet, quosdam cenſere *Theonem* & concluſionum, & demonſtrationum Autorem eſſe, hæc addit verba: *Quæ ſententia eo refellitur, quod Proclus, & Boëtius; immo & Alexander Aphro-*

phrodiseus, qui Theone antiquior fuit; multa Euclidi tributa iisdem verbis, atque eodem ordine, sub Euclidis nomine citent. Ulterius SAVILIUS, uti narrat GREGORIUS *in præfat.* nobis testis est, quod eadem quæ nunc habemus Elementa, sub *Euclidis* nomine, eodem ordine iisdem verbis ab universa Antiquitate, non solum *Theone* posterioribus, verum etiam anterioribus, fuere agnita. Sic enim *Alexander Aphrodiseus* qui circa initium Tertii seculi claruit, eadem quæ nunc habemus Elementa Euclidea, iisdem verbis *Euclidi* tribuit: uti & *Proclus* & *Boëtius* aliique qui post *Theonem* inclaruere. Quapropter veritati magis convenire videtur ea sententia, quæ statuit, quod Elementa *Euclidis* quæ possidemus, ac quæ hodie in manibus versantur, ab *Euclide* sunt adornata, quam ea, quæ à *Theone Alexandrino* ea petenda esse censet.

§. XXV. Sed cum vulgaris sit opinio, quæ etiam multos, in viris eruditis, nacta est Patronos; non uti *Ramus* inepte censuit; *Euclidem* nec Propositiones nec Demonstrationes scriptas tradidisse: verum *Euclidem* suorum Elementorum tam conclusiones, quam validissimas apodeixes scripto reliquisse; inque *Euclidem*, *Theonem Alexandrinum* commentaria sive demonstrationes scripsisse; quæstio est, quid *Theon* in suis commentariis, quæ vulgo ipsius nomine circumferuntur præstiterit, ac quænam ejus sint partes istis in Elementis? At vero difficilis determinatu

natu illa est, quænam sunt in his Elementis *Theonis* partes; cum tot diversæ, hac super re, Virorum Eruditorum sunt sententiæ. Si DECHALES audiamus in *Tract. de Progressu Mathes. pag.* 12. ille multum tribuit *Theoni*, cum inquit, *liber Elementorum Euclidis multum debet Theoni, à quo est in ordinem digestus, & etiam auctus.* Quocum fere consentit incertus quidam Scholiastes, qui uti narrat HENRICUS SAVILIUS in uno codice MSS. ad oram marginis, ad decimum tertium librum, scripsit; collectionem Elementorum *Euclidis*, ordinationem & dispositionem *Theonis* esse. vid. GREGORIUS *in in Præfat. citata* Cui etiam sententiæ suum adjicere calculum videtur VOSSIUS *de Scientiis Mathem. pag.* 59. ita scribens; *vera autem de hoc opinio est, quod Theon novam Euclidis editionem adornarit; in qua Euclidea & melius digesserit, & aliquot locis auxerit.* Neque etiam ab eadem abludere videtur COMMANDINUS *in Proleg. in Euclid. Elem.* cum ait, *Nos autem medium secuti, credimus libros de Elementis suis ornatos, Demonstrationibus ab Euclide nobis fuisse relictos.* Ac postquam id paucis probasset, hæc adjungit verba; *Ut autem hoc vere asserimus, ita illud merito concedemus, Theonem excellentis ingenii virum, Euclidis Demonstrationes fusius, planiusque explicatas, in lucem protulisse.* Tandem inferius paululum hæc subsequuntur verba, *Sunt igitur illæ quidem Demonstrationes Euclidis, sed eo modo conscriptæ, quo olim Theon Euclidem secutus suis discipulis explicavit.* Sed isti opinio-

ni, qua asseritur *Theonem* Elementa Euclidea adornasse & disposuisse, immo fusius explicasse, videtur obstare *Procli* & Antiquorum omnium autoritas. Quia iisdem verbis, ac eodem ordine, pro ut in *Euclide* exstant, tam qui ante *Theonem*, quam qui post eundem claruere, Euclidea citant. Obstat etiam mirabilis & concinna propositionum series, ex quibus unam loco si eximas, tota corruat compages, & structura necesse est. Potior videtur sententia, quod Elementa græca Euclidea, quæ vulgo commentaria *Theonis* nuncupantur, quæque nunc ab omnibus teruntur, nihil aliud sint, quam nova Editio *Euclidis*, à *Theone* adornata, nonnullis in locis ab ipso aucta. Nam THEON *in commentariis in Almagestum*, de Editione quadam à se edita loquitur; ubi simul mentionem injicit demonstrationis, de sectoribus in circulis æqualibus, quod sint proportionales angulis ad centrum constitutis, à se factæ. Quæ etiam in omnibus Græcis Exemplaribus annectitur ultimæ propositioni libri sexti. Idem judicium ferendum putat de multis in libro decimo lemmatiis *Savilius*, & fortasse propositionibus nonnullis. vid. GREGORIUS *in præfat. Forte inquit* hic insignis Geometra, *& Definitiones quædam & Axiomata, libro Primo præposita, Theonem, vel alium præter Euclidem agnoscunt autorem, ex. gr. Axioma* XI. *Nam licet Euclides hoc pronunciatum adhibeat, in Demonstratione prop.* 29. *Elem.* I. *illud tamen pro Axiomate non habuit, sed pro conversa prop.* 17. *utpote quæ ex illa manifeste consequatur.*

tur. Fortasse & alteræ Demonstrationes, quæ passim occurrunt, sunt etiam Theonis: &c. *Ex quibus omnibus concludit Savilius, Theonis fuisse partes, in Euclide paucis quidem in locis interpolando, explicando, augendo; ultra hoc nullas.*

§. XXVI. Hæc vero Euclidis Elementa à multis retro seculis magni semper æstimata fuere, cum propter claritatem probationum, quæ in iis valde elucet, tum propter demonstrationum robur per tota Elementa dispersum; quibus accedit quod sit absolutum Elementorum opus. Etenim de iis testatur GREGORIUS *in præfat.* sæpe citata; *corpus illud Elementorum ea claritate, & evidentia; eo judicio, ac firmitudine; esse compactum; ut singulæ in iis propositiones jam à bis mille annis, ab omnibus habeantur pro evidentibus, & pro talibus passim ab omnibus citentur.* Quam Probationum evidentiam nonnulli suspicientes, firmissimis demonstrationibus, quæ autore *Proclo*, nec coargui nec convinci possunt, omnia istis in Elementis occurrentia, munita esse, apud animum pensitantes Veteres quidam; ansam inde affirmandi, *Euclidem errare non posse*, nacti sunt. Quæ licet de mortali nimis superbe dicta, aliquantum conniveri possunt, si de Mathematicis *Euclidis* demonstrationibus tantum intelligantur. Præclarum est enim Testimonium PETRI RAMI, cæteroquin severi *Euclidis* castigatoris, de Euclideis Probationibus: dicens, *nullus paralogismus, nulla* ψευδογραφία

in totis Elementis, *nobis quanquam severe inquirentibus*, *animadverti potuit* : *quam laudem esse singularem profiteor* ; *quamquam nulli adhuc*, *neque Grammatico*, *neque Rhetori*, *neque Logico concedere potui*, *ut in Grammatica*, *Rhetorica*, *Logica nihil falsi docuisset.* Hæc itidem Demonstrationum, invicta firmitas, & conclusionum absoluta perfectio, forte etiam in causa fuit; cur nonnulli in *Euclidis* vocabulo Mysterium quasi aliquod latitare opinati sunt; cum vocabuli *Euclidis* Etymon ex græca lingua derivandum censent; putantes illud ex Græco εὖ, quod *benè* denotat, & κλείω *claudo*, esse compositum; idemque denotaret *Euclidis* vocabulum, quasi quis diceret *bene claudens*, seu *bene concludens.* Licet vero *Euclidis* Demonstrationes firmissimas esse agnoscamus; non tamen existimarem eam ob rationem Antiquitatem eum nomine eo insignivisse, cum multi ante & post eum extiterint *Euclides*, in quas illa Etymologica derivatio non quadrat. Est sane eligans Elogium, quod de his Elementis verba faciens, recitat CARDANUS *de mira subtilitate lib.* 13. dum scribit, *Quorum inconcussa dogmatum firmitas*, *perfectioque absoluta adeo*, *ut nullum opus jure huic aliud comparare audeas. Quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat*, *ut soli hi in arduis quæstionibus videantur posse à vero falsum discernere*, *qui Euclidem habent familiarem.* Audiri etiam meretur CLAVIUS, *in prolegomenis*, asserens; *Euclidis Elementa semper magni æstimata*, *neque ullus ante eum par ei extiterit*, *licet non pauci ante Eum Elementa*

con-

conscripsere teste Proclo. Quin & teste VERULAMIO *de Augmento scientiarum lib.* 3. *Euclidis absolutum adeo est opus Elementorum, ut Euclideis laboribus in Geometricis nihil additum sit à sequentibus, quod intervallo tot seculorum dignum sit.* Quare RAMUS *in libro tertio Scholæ Mathematicæ* notat. *Duo fere millia Annorum existimatur toto terrarum orbe ab omni reprehensione liber & sacro sanctus fuisse Euclides, & si quid post homines natos solidæ scientiæ comprehensum & animadversum est, id Eucli acceptum refertur.* Ut autem aliorum de *Euclidis* Elementis Testimonia silentio præteream, unicum adhuc adducere haud in congruum esse opinor; illudque sumam à GREGORIO ABULPHARAIO, *quod in Historia compend. Dynastarum.* super Elementis Euclidis dicit. Sic enim ibidem loquitur Scriptor ille Arabs; *Quod Euclidis liber qui vocatur* στοιχεια *celebris admodum est, & utilis; ac quod non est Græcis hoc in genere liber alius generalis, neque secutus est eum aliquis, qui non vestigia ejus sectatus est; idemque quod ille dixerit; nec inter homines, qui præstantiam ipsius confessus sit, vel multiplicis ejus Doctrinæ testimonium perhibuerit.*

§. XXVII. Opus hocce Euclideum sua inscriptione etiam videtur ornatum fuisse: ex *Commandini* mente *Proclus* in fronte ejus Legisse censetur, ευκλειδȣ στοιχειωσις; seu *Euclidis Elementaris institutio.* VOSSIUS vero *de Scientiis Mathematicis cap.* 15. §. 2. inscriptum illum librum fuisse putat, στοιχειων βιβλια, *Elemen-*

torum libros, vel στοιχειώσιν, *Elementorum Doctrinam*; omisso Geometriæ vocabulo, cum tamen Geometrica significare vellet στοιχεῖα. Alii vero codices inscribuntur. Ευκλειδου στοιχειων βιβλ. ιε, εκ των Θεωνος συνουσιων. Quæ tamen verba ex *Theonis Colloquiis*, deinde sunt adjecta, non à *Theone* ipso uti existimat COMMANDINUS *in præfat.* sæpe *citata*, *verum à quodam Theonis familiari*, *Viro plane erudito*, *qui nobis Euclidem*, *eo quo nunc habetur modo legendum concessit.* Neque etiam hæc verba in Vetustissimis reperiuntur Manuscriptis; uti ante ex SAVILIO notavimus. Mirabuntur forsan multi *Euclidis* Inscriptionem Legentes, Eum tantum opus suum appellasse στοιχεῖα, *Elementa:* non vero Geometriæ Elementa, quemadmodum hoc Elementare corpus postea à Latinis ita est inscriptum; cum illud vocabulum de multis dici possit, uti de litterarum principiis, de rebus naturalibus, ac de multis aliis. Quare primo inspicientem, ac στοιχεια in titulo legentem, penitus dubium relinqueret, de quanam materia istis in Elementis tractetur. Verum non absque ratione, *Euclides* tantum στοιχεια librum suum inscripsisse censendus est, omisso Geometriæ vocabulo. Nam præterquam quod ex primis verbis hujus operis, in quibus à puncto initium facit; quanam de re isto in libro tractetur, cuilibet legenti statim innotescit; eo præterea tempore, quo *Euclidis* hæc conscripsit, Geometriæ studium, erat maxime Elementale & fundamentale; cum fere juventus omnis Græca pri-

primos ſuos conatus in Geometriæ ſtudio exercendo inſtituerit; ac una cum primis cognitionis principiis hanc Doctrinam conjunxerit; nemini Elementa Legenti incognitum eſſe potuit; cum frequens & percelebre tunc temporis erat Geometriæ exercitium; quonam de ſubjecto in ſuis Elementis ageret *Euclides*; ac quodnam Thema in iis proponeret. Si non aliæ acceſſerint rationes, quæ *Euclidem* Virum acutiſſimi ingenii permoverint, ſuum opus tantum Elementum nuncupare. Si ante dicta penſitemus; hæc ϛοιχεια ſunt multorum de re Geometrica optime meritorum Scriptorum principia & fundamenta. Ea ſunt fontes & ſcaturigines ex quibus tot effluxere Geometriæ rivuli. Ea ſunt fundamenta firma, quibus tot Geometræ Veteres ſuum Mathematicum ædificium ſuperſtruxere; ac adhuc hodie Recenſiores ſuper iis condunt. Ea ſunt tot Elementa quotquot præclara habemus opera Geometrica. Forte etiam in genere dixit ſuum opus ϛοιχεια, non ad Geometriam tantum, ſed ad alias quaſcunque intellectum perficientes & ornantes Scientias ſeſe extendentia. Forte plura ſub iſto Elementorum vocabulo intellexit. *Commandinus* vero per excellentiam quandam hanc inſcriptionem de Geometria intelligendam eſſe putat: idemque eſſet ac Oratorem dicentes *Demoſthenem*; Poëtam *Homerum* vel *Virgilium* intelligimus; ſic etiam Elementa dicentes, Geometrica intelligenda eſſe, exiſtimat.

§. XXVIII. Sunt interim quidam; qui Geometriæ nomen Euclideis Elementis concedere nimis religiosi sunt, existimantes Geometriæ scientiam esse universaliorem quam his docetur Elementis; ac propterea inepte hæc Elementa dici Geometriæ Elementa, potius servandum esse vocabulum Elementum, quam ea Geometriæ Elementa inscribere. Alii vero putant, jure optimo hæc Elementa, Geometriæ Elementa appellari. Cum Elementa *Proclo* autore dicuntur ea, quorum contemplatio ad aliorum pertinet scientiam, & ex quibus apparet solutio eorum, quæ in ipsis dubitare contingit: vel uti ait *Menechmus:* Elementum dicitur, in quod cum sit magis simplex compositum resolvitur; conferantur COMMANDINI *Prolegomena*. Jam vero hæc nostra Euclidea talia sunt Geometriæ Elementa, in eorum enim contemplatione solutionem acquirimus illorum, quæ in aliis dubitare contingit; ex iis namque profluxit, quodcunque excellens Geometriæ inventum, quod Autoris famam quam maxime longam effecit, iisque tanquam certis innititur principiis. Ex iis hauritur, & intelligitur, quidquid ad solidam Geometriæ notitiam requiritur: sine horum scientia, frustra tentant Mathematicorum tam Veterum quam Recentiorum stupenda aggredi opera; quæ ex his Elementis lucem foenerantur. Utuntur itidem Matheseos Scriptores Veteres in suis Demonstrationibus his *Euclideis* Elementis tanquam

quam principiis, ita ut eorum de rebus Geometricis Theoremata & Problemata in hæc noſtra reſolvantur Elementa; ac ex his reliquæ Matheſeos partes fluant. Videantur CLAVII *Prolegomena.* Verum quidem eſt, *Euclidem* ſuo in opere Geometrico non diſertis verbis pertractaſſe omnia ad rem Geometricam pertinentia, ſed uti ait CLAVIUS *loc. cit.* quæ viſa ſunt neceſſaria, atque utilia ad communem utilitatem; vel uti loqui amat COMMANDINUS, quæ Elementali tradere potuit ordine. Id autem non tollit, quo minus tamen hæc Elementa, Geometriæ nomen gerant; cum quidquid in Geometria docetur, ex his facile derivari poſſit Elementis. Nullum enim hucusque eſt in Geometria inventum; quin natales ſuos Euclideis debet Elementis, in iis ſua habet principia & fundamenta, ſine quibus nec intelligi nec demonſtrari poſſunt.

§. XXIX. Ejusmodi Elementorum *Euclidis* conſpectus, protinus nobis neceſſitatem quandam, ad ea Elementa cognoſcenda, inſinuat. Si enim perpendamus Elementa hæc ad univerſam Geometriam eſſe neceſſaria; quis iis, qui Geometrica imbui ſcientia ſtudet, carere poſſit? Si teſte COMMANDINO principaliſſima, ſimpliciſſimaque, ac primis principiis maxime affinia Theoremata Geometriæ iis in Elementis contineantur: Quis cognitionis Geometricæ avidus, non omnium primo hæc Elementa conſulere teneatur? Ea ante omnia eum tractare o-

portet, qui in Geometricis Scientiis se erudiri velit; in iis se exercere, is debet, qui altiora cupit; ac Veterum & recentiorum Mathematicorum scripta intelligere percupit. Vel uti ait CLAVIUS *in proleg. citatis*, *sicuti is qui legere vult, Elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis utitur in vocabulis omnibus exprimendis: sic qui alias disciplinas Mathematicas sibi reddere desiderat familiares, Elementa hæc Geometrica plene ac perfecte prius calleat necesse est.* Frustra enim tentant Mathematicorum opera aggredi, qui hisce principiis non satis sunt muniti. Scriptores enim illi *Euclidis* demonstrationibus, tanquam fundamentis utuntur; ac testatur CLAVIUS sibi longa diuturnaque Experientia compertum esse, *eam esse necessitatem Elementorum Euclidis, ut frustra quisquam se speret sine illorum præsidio, Aristarchi, Archimedis, Apollonii, Theodosii, Autolyci, Menelai, Ptolemai, Pappi, Sereni, Aliorum Celebrium Mathematicorum Demonstrationes intelligere* vid. COMMANDINUS *in Prolegom.* Immo cum hæc Elementa Universæ Geometriæ tradunt principia, sine quibus nec sciri nec percipi rite possunt abstrusiora istius scientiæ Theoremata ac Problemata; quis non mecum fateri tenetur Elementa hæc Geometriæ studiosis scitu perquam necessaria esse?

§. XXX. Quanti olim necessitatis & utilitatis *Euclidis* Elementa, ut rite studiosa juventus iis imbueretur, habita sunt, satis declarant Professiones Euclideæ, quæ antea in

in Academiis & Gymnasiis fuere. Etenim creati fuere Professores, quibus Euclidea expónere Elementa, demandatum erat. Sic enim refert DECHALES *in tract. de Progres. Mathes. cap.* 2. *pag.* 14. quod *Joannes Scheubelius* in Academia Tubingensi Euclidis Professor fuerit ordinarius; ac testatur CONRADUS DASYPODIUS *in præfat. in lib.* 1. *Euclidis*; primum illum librum in omnibus fere Gymnasiis prælectum fuisse; inque Schola Argentinensi, iis, qui sunt in prima curia propositum. Porro etiam notat SAMUEL REYHERUS *in dissert. de Euclide, cap.* 2. Lipsiæ olim moris fuisse, ut summos in Philosophica facultate honores ambientes, speciminis Mathematici loco *propositionem* 47. *Elem.* 1. demonstrent, & propterea hanc propositionem dictam magistralem fuisse, illosque qui rite dictum Theorema demonstrare potuerunt, Magisterii titulo dignos fuisse habitos. Ac ni fallor in Academiis Patriæ nostræ, si non in omnibus, saltem in quam plurimis, constitutum est, ut, qui ad lauream Doctoralem Philosophiæ adspirant, Propositionem unam, vel duas, ex Elementis Euclidis, quibus suorum in Mathesi profectuum specimina dant, desumtas demonstrent.

§. XXXI. Maximis laudibus *Euclidis* in Geometria peritiam ornant tam Antiqui quam Neoterici Matheseos Scriptores. Ne autem omnia commemorem, pauca quædam hic tantum adducam; & quidem è Veteribus

PAPPI

PAPPI ALEXANDRINI teſtimonium, tanquam ſufficiens, referam. Scribit enim clarus hic Geometra *in lib.* 7. *Collectionum Mathem. Quod Euclides operam dans diſcipulis Alexandriæ, longo tempore adeo excellentem in Mathematicis habitum ſit aſſecutus, ut nunquam fuerit deceptus.* Ex Recentioribus CLAVIUS *in Proleg. in Euclid.* audiendus eſt; qui inquit, *noſter Geometra acutiſſimus, cum in Doctrina Academicorum, eſſet ſumma cum laude verſatus, animum totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit, in quibus ita excelluit, ut concordi omnium judicio principem inter Mathematicos ſibi locum jure optimo vindicarit.* Vocatur idcirco à SAVILIO *inſignis Geometra*, ac à DECHALES *ſummus Geometra.* COMMANDINUS vero *in Euclidem, in proleg.* dicit, *quod Matheſin ita præclaro animi impetu eſt aggreſſus, ut progreſſus admirabiles, ac ſempiterna ævi memoria digniſſimos in ea fecerit; conſtantique omnium Doctorum teſtimonio Geometrarum princeps habitus ſit; immo majorem ſemper conſecutus eſt laudem, quam omnes illi qui ante eum vixere.*

§. XXXII. Quanti etiam ſemper, per totum terrarum orbem, æſtimata fuere, & hodie ubique æſtimentur *Euclidis* noſtri *Elementa*; quæ ſuper Geometrica Doctrina conſcripſit; abunde teſtantur, tum *Commentaria* à multis Viris eruditis in Elementa Euclidea adornata; tum *Editiones* illæ multiplices, quibus innumeris in locis eadem lucem adſpexere. Ea vero quæ colligere potui, hic com-

commemorare non inutile fore duxi. Ad id autem efficiendum imprimis usus fui laboribus FABRICII *in Biblioth. Græc. lib.* III. *cap.* XIV. & M. GEORGII MATHIÆ BOSE *in Schediasmate literario, de variis Elementorum Euclidis Editionibus*, in quo partim de se, partim è WOLFIO recenset Editiones à FABRICIO omissas. In hoc catalogo & Commentariorum, & Editionum adornando, hunc tenui ordinem, ut pro annorum numero, quo prodirere, se mutuo sequantur.

Inter omnes, qui Euclidis Elementa commentariis suis illustrare conati fuere, Antiquissimus esse videtur THEON ALEXANDRINUS.

(Secundo loco commemorandus est PROCLUS DIADOCHUS, cujus commentarium latinitate donavit FRANCISCUS BAROCIUS.)

BOËTHIUS *Euclidem* translatum in Romanam Linguam dedit, quæ inter Boëthii opera hodie exstant, ac inscribitur *Euclidis Megarensis Geometria ab Anit. Manl. Severin. Boëthio translatus.* Operum *pag. m.* 1179. ubi tantum propositiones sine demonstrationibus exstant.

Verum *Euclidem* Latini prius ex Atabico translatum habuere, quam ex Græco fonte. Nam JOANNES CAMPANUS qui vixit circa salutis annum MI. uti Autor est *Raphaël Volaterranus*; vel anno Domini CIↃXXX. uti censet *Trithemius*, ex Arabico in Latinum vertit. Illa autem versio reprehenditur

à

à CLAVIO *in præfat. in Euclid.* Quod *Campanus* in omnibus ſecutus ſit, traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, & Methodum perverterunt, verbaque Propoſitionum ejusdem locis non paucis immutarunt; ut verus, germanusque Authoris ſenſus, perdifficile poſſit intelligi. Vid. VOSSIUS *de Scient. Mathem. pag.* 61. 62.

Pariter ATHELARDUS, ſive ADELARDUS, Anglus, Monachus Bathonienſis *Euclidis* Geometriam ex Arabico tranſtulit Latinè Anno CIƆCXXX.

Vetuſtiſſimum Elementorum Typis exſcriptorum exemplum eſſe videtur, quod prodiit græce & latine ſub titulo. *Euclidis opus Elementorum in* XV. *libros diviſum, cum Commentariis Campani, & Præfatione Erhardi Radholt, Auguſtani, ad Johannem Mocenicum, Urbis Venetæ Principem*; editum Venetiis, per dictum RADHOLTUM anno 1482. Cujus Editionis meminit CORNELIUS à BEUGHEM *in incunabulis Typographiæ.*

Prodiere libri XIII. latine, ex verſione, & cum Commentario LUCÆ PACIOLÆ DE BURGO. Venet. 1489. fol.

Euclidis Elementa Latine, cum commentariis *Campani*; per LEONARDUM de Baſilea, & GULIELMUM de Papia, ſocios; 20. Cal. Jun. edita ſunt Vicent. 1491. fol.

ZAMBERTUS vertit libros. XIII. ſub titulo Elementorum *Euclidis* ex traditione *Pappi* Philoſophi, quæ verſio prodierat. Venet. 1505. fol.

AM-

AMBROSIUS LACHER DE MERSPURGK Conſtanci dioceſis Arcium liberalium Magiſter, ſacreque Mathematice ſtudii noſtri Ordinarius in Achademia Franckfordiana. *Euclidem* edidit anno 1506. 4. plagulis novem; *Campanum* ſequitur. Non tamen niſi quatuor priores libros comparare in hoc volumine voluit Autor.

Textus de ſphæra *Johannis de Sacroboſco*, & Geometria *Euclidis Megarenſis*. Præmittitur *Jacobi Fabri ſtapulen.* Præfatio ad ſplendidum virum *Carolum Borram* Theſaurarium Regium; tribus ultimis paginis habes libros quatuor Geometriæ *Euclidis* à *Boëtio* in Latinum translatos. In fine exſtat. Impreſſum Pariſii in officina *Henrici Stephani* è regione ſchole decretorum ſita. Anno Chriſti Syderum conditoris 1507. fol.

LUCAS PACIOLUS, Elementorum libros XV. interprete *Campano*, edidit, Venet. 1509. in fol. impreſſi ſunt apud *Paganinum Paganinum*, ac dedicati *Cardinali Volaterrano*.

Latine prodiere *Euclidis* Elementorum libri XV. interprete CAMPANO; & libri XIII. interprete BARTHOLOMÆO ZAMBERTO Veneto, Pariſiis 1516. apud *H. Stephanum* avum, fol. una cum aliis *Euclidis* ſcriptis Baſiliæ. 1537. & 1546. fol.

ORONTIUS FINÆUS latine commentatus eſt in VI. priores *Euclidis* libros, qui prodiit Pariſiis. 1530.

Euclidis Elementa vulgata ſunt Græcè hoc titulo, εὐκλείδου στοιχείων βιβλία ιέ ἐκ τῶν Θεω-

νος

νος συνουσιῶν. Basiliæ 1533. apud *Joannem Heruagium*, fol. edente SIMONE GRYNÆO, è duobus codicibus MSS. Quorum alterum Venetiis *Lazarus Baysius*, alterum Parisiis *Johannis Ruellius* suppeditaverat. Additi etiam in illa editione, itidem Græce, è codice Oxoniensi *Joh. Claymundi* sunt, sed admodum inemendate, Commentariorum libri quatuor, Autore *Proclo* Philosopho.

Euclidis Elementorum libri Græcè tum Florentiæ, tum Romæ, excusi sunt. 1545. 8.

JOHAN SCHEUBEL. Professor Euclidis Tubingæ, latine edidit VI. priores libros in quorum figuris nullæ literæ. Basileæ 1550. fol.

Libri VI. priores latine prodiere cum Demonstrationibus ORONTII FINÆI Parisiis apud Simon. Colineum. 1551. 4.

Libri XV. Græce & Latine excusi sunt cum præfatione *Stephanì Gracliī*. Parisiis 1557. 1573. & 1598. 8.

JACOBUS PELETARIUS libros VI. Priores latine edidit cum suis demonstrationibus fol. Anno 1557.

FRANCISCUS BAROCCIUS, *Procli* libros quatuor commentariorum in Euclidem, cum scholiis & figuris latine tantum edidit. Patavii. 1560.

WILHELM HOLTZMAM (*Guil. Xylanlandri*) libri sex priores Germanicè edidit Basel apud. J. *Operinum* 1562. fol.

Hanc sex priorum librorum, versionem Xylandri, JOHAN PETERSZ. DOU in Bel-

Belgicam Linguam transtulit. 1606. quæ versio iterum in Germanicam Linguam translata est à SEBASTIANO CURTIO.

Libri XIII. Græcè & Latinè ex Editione CONRADI DASYPODII Argent. 1564. 8. additis, ad librum primum & secundum tantum, *Theonis* commentariis, & ad secundum *Barlaami* Monachi Demonstrationibus, quibus ad numeros applicat, quæ de Lineis ac figuris planis *Euclides* docuerat.

Libri. XV. Italice versi & Explicati à NICOLAO TARTAGLIA. Venet. 1565. 4. & cum Commentario *Campani* itidem in lingua Italica Venet. 1569. fol. Cum scholiis antiquis incerti Autoris correcti & illustrati à FREDRICO COMMANDINO 1575. fol. & Pisauri. 1619. itidem Italice primi sex libri Mediolani. 8.

ARNOLDUS LENSÆUS Isagogen in Elementa *Euclidis* composuit. Antw. 1565. 8.

CHRISTIANUS HERLINUS, & CONRADUS DASYPODIUS, publicarunt Argentinæ 1566. fol. Analyses Geometricas VI. librorum *Euclidis*; ubi propositiones, Græcè, Demonstrationes, mere latine.

Libri XV. latine demonstrati à FRANCISCO FLUSSATE CANDALLA, & libro XVI. per ipsum addito aucti; de solidorum regularium inter se invicem collatione, itemque XVII. de compositis regularibus. Parisiis 1566. fol. & 1578. fol.

Euclidis Elementa cum notis H. BILLINGSLEY & præfat. *Joh. Dee* Londinensis 1570. Lond. fol. idiomate anglicano apparuere.

****** CON-

CONRADUS DASYPODIUS inter alia *Euclidis* opera libros XV. Elementorum edidit Argent. 1571. 8. in ea editione nudæ propositiones græce & latine reperiuntur. Edidit & eodem anno librum primum *Theonis* commentariis illustratum græce, cum latina perspicua interpretatione, & *Heronis* vocabulis Geometricis.

FREDRICUS COMMANDINUS libros XV. Euclidis latine vertit, & cum suis commentariis edidit, Pisauri 1572. & 1619. fol.

FRANCISCUS MAUROLYCUS Opuscula Mathematica Venetiis 1575. 4. edidit, in quibus Theoremata XIIItii Elementi.

Per CONRADUM DASYPODIUM libri VI. latine in lucem editi, cum Scholiis *Isaaci* Monachi Argentorati. 1579. 8.

CHRISTOPHORUS CLAVIUS libros XV. latine cum scholiis & commentariis insignibus edidit Coloniæ 1591. fol. Romæ 1603. 2 Tom. in 8. Francofurti 1607. 8. ac inter opera ejus Mathematica Moguntiæ. 1612. fol. iterum Coloniæ 1627. 8. prodiit, in quorum decimo quarto & quinto, *Campanum* imitatur, *Flussatis* decimum sextum addit, ubi 31. Theoromatibus, ac 5. problematibus quinque corpora, variè sibi inscripta & circumscripta considerantur; ad modum tamen *Dasypodii* propositiones solas, absque Demonstrationibus ostendit. Alia iterum *Clavii* editio prodiit Francofurti 1654. 2. Tom. in 8.

NASIRIDINUS TUSINUS Persa Euclidis

dis libros XIII. Arabicè vertit; quæ versio luculentis typis Arabicis lucem vidit Romæ 1594. fol. ex Typographia Medicea.

Excusus est Typis *Euclides* Coloniæ 1600. 8. In hac solæ Euclideæ Propositiones absque Demonstratione reperiuntur; præfixa est præfatio *Gracilis*.

CHRISTOPHORUS DIBAUDIUS latine Demonstrationem dedit linealem VI. priorum librorum. Arnhemiæ 1603. 4. eorumdemque demonstrationem numeralem. Lugd. Bat. 1603. Lib. VII. VIII. IX. Demonstrationem Arnhemiæ 1605. libri X. seu Arithmeticæ irrationalium, demonstrationem Linealem & numeralem. ibid. eod.

AMBROSIUS RHODIUS XIII. libros latine demonstravit Witeb. 1609. 8. 1634. 1661.

SIMON MARIUS, Germanice VI. priores *Euclidis* libros demonstratos dedit, Onoldi. 1610. fol.

FLORIMUNDUS PUTEANUS librum *Euclidis* decimum cum commentariis edidit Parisiis. 1612. fol.

JOH. CHRIST. KNOPFF. libros duos priores, cum explicatione JOH. PAULI RESENI edidit Witteb. 1612. 8.

DOUNOT DE BAR-LE DUC. Gallice *Euclidis* Elementa vertit, Paris. 1613. 4. m. In libro decimo ordo turbatus, ut in Heruagiana latina editione in libris 5. 14. & 15. *Euclidem* stricte sequitur.

D. HENRION libros. XV. in Linguam

Gallicam verſus eſt, Paris. 1615. 8. (& 1632. in 4ta) ac 1631. 8.

Libri VI. priores cum commentario JOH. LANZ. S. J. prodiere Ingolſt. 1617. 8.

SEBASTIANUS CURTIUS Germanicam paravit Editionem Amſt. 1618. 4. item 1634. 8. m.

Libri XIII. Lond. 1620. fol. græce & latine prodiere, nitida editio, cum *Commandini* verſione, adjectis figuris accuratis.

CAROLUS MALAPERTIUS. libros. VI. priores latine demonſtravit. Duaci 1625. 12.

M. LUCAS BRUNN. Germanice *Euclidis* Elementa practica, oder auszug aller Problematum, und handarbeiten, aus den XV. büchern *Euclidis*. Norimb. 1625. 4. Definitiones nullæ, Theoremata nulla, ſed nudæ Problematum ſolutiones.

PETRUS HERIGONIUS Gallice libros VI. priores vertit, ac edidit Paris. 1644. 8. & libros. XV. latine, & Gallice: in Tom. 1. Curſus Mathematici Paris. 1644. 8. m.

MARIUS MERSENNUS libros. VIII. latine in Synopſi ſua Mathematica demonſtratos dedit Paris. 1644. 4.

CLAUDIUS RICHARDUS latine in libros. XIII. commentatus eſt, Antwerp. 1645. fol.

MARIUS BETTINUS in Ærario Mathematico, Prolixos commentarios in VI. priores libros Euclidis dedit; Bononiæ. 1648. 3. Tom. 4.

GEORGIUS FORNIER latine demonſtra-

ſtravit VI. libros priores. Lond. 1654. 12. & ſecunda editio Paris. 1654. 24.

ANDREAS TACQUET Elementa Geometrica Euclidea edidit Antwerp. 165[illegible]. 8. ac Amſtel. 1701. 8. & cura WHISTONI recenſita & locupletata eſt, Cantabrigiæ 1703. 8. (eadem recuſa Amſtel. 1725.) in quibus. VI. priores & XI. XII. continentur libri.

ISAACUS BARROUW librorum XV. editionem latinam paravit Cantabr. 1655. 8. Lond. 1659. 1678. Marburg. 1675. 8.

JOH. ALPHONSUS BORELLUS Euclidem reſtitutum, ſive priſcæ Geometriæ Elementa brevius & facillius contexta elaboravit. Piſis. 1658. 4. Romæ 1679. 12.

CASPARUS SCHOTTUS libros VI. priores edidit in curſu Mathematico Herbip. 1661. Franc. 1674. & Bamb. 1677. fol.

CHRISTIANUS MELDER VI. priores Euclidis libros edi curavit Lugd. Bat. & Amſtel. 1673. 12. *Furnierio* ſe multa debere ipſe agnoſcit.

CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES XIV. libros Elementorum edidit in mundo Mathematico, ejusque Tom. I. qui prodiit. 1674. nec non poſt Autoris obitum, editore *Amato Varcino*. Lugd. 1690. fol. (Gallice vero libros. VI. priores cum XI. & XII. Paris. 1683. in 12.)

(Liber 5. Elementorum Euclidis explicatus ſecundum Doctrinam Gallilæi, à VINCENTIO VIVIANI Florentiæ 1674. 4.)

Euclidis Elementa Geometrica, novo or-

dine ac Methodo fere demonſtrata, una cum *Nicolai Mercatoris* in Geometriam Introductione brevi. Lond. 1678. 12. Autor miſſo ordine Geometræ, in margine expreſſit librum, & numerum propoſitionis ex ordine *Euclidis*.

JONAS MOORE anglice libros VI. priores cum XI. & XII. edidit, in the new ſyſteme of the Mathematicks. Lond. 1681. 4.

HENRICUS COETS latine VI. priores libros demonſtravit Lugd. Bat. 1691. 8. & Amſtel. 1705. 8.

A. E. B. V. P. Teutſch Redender Euclides, oder acht Büeker (1-6. ac 11. & 12.) von denen anfängen des Meſſkunſt. Wien. 1694. 4.

OZANAM in curſu Mathematico libros. VI. priores, una cum XI. & XII. Gallice interpretatus eſt, Paris. 1697. qui recuſus Paris. 1699.

SAMUEL REYHERUS, germanice VI. priores libros edidit, Kiel. 1697. 4.

HENRICUS MEISNERUS Hamburgi Elementa *Euclidis* edere coepit Græcè & Germanicè, cum uberrimis Commentariis, itidem Germanicis A. 1699. fol. ſed non editis ultra librum ſecundum.

DAVID GREGORIUS Græcè & Latinè libros XV. Euclidis recenſuit, ac edidit Oxoniæ 1703. fol. è Theatro Sheldoniano. nitidiſſima Editio.

JACOBUS GOODEN ex *Euclide* præcipua collegit Theoremata, ac edidit. Leod. 1704. 8.

Decha-

Dechales par OZANAM Paris. 1709. 12. m.

The Elements of Euclid, With ſelect. Theorems out of Archimedes by the Learned Audrew Taquet, by WILLIAM WHISTON. the third edition Lond. 1714. 8. m.

JOANNES KEIL, ex verſione *Commandini* libros VI. priores cum. XI. & XII. imprimi curavit. Oxon. 1715. 8.

P. JACOB KRESA *Euclidem* in linguam Hiſpanicam traduxiſſe fertur, in literariis novis Germanice 1721.

SAMUEL CUNN Keilianam editionem anglice traduxit Lond. 1723. 8.

Demonſtration univerſelle des converſes d'Euclide par Mr. SELLIER 1723.

Prodiit apud Woodward tomus ſecundus Elementorum Euclidis, ex editione *Gregorii* in linguam Anglicam verſorum, per EDMUNDUM ROVAN 1732.

Euclids Elements of Geometry, from the Latin tranſlation of *Commandine*, by Dr. *John. Keill*, tranſlated by *Samuël Cunn*, carefully reviſed an corrected by JOHN. HOM. the third. edition. 1733.

Præter has *Euclidis* Editiones etiam recenſentur Elmenta *Euclidis* Arabice verſa à THEBETO.

Perſicam verſionem Bodlejana; *Syriacam* Cantabrigienſis Bibliotheca ſervat.

Libri VII ex Arabico Ebraicè verſi à JOH. JACOBO MFCHIR.

Alia Hebraica verſio R. MOSIS ABEN TIBBON. Quam verſionem *Buxtorſius* Mon-

ſpeſſuli. A. C. 1210. factam eſſe teſtatur vid. WOLFII. *Biblioth. Hebrææ part.* 1. *pag.* 133.

Denique Sinice, ac Tartarice *Euclidis* Elementa verſa ſunt.

Plantavitius Romæ in Bibliotheca Medicea præclariſſimum Euclidis Exemplar Hebræum vidiſſe ſe ait, magnis in folio membranis, iisque terſiſſimis, nobilique charactere, & auctario duorum librorum, qui non exſtent in Græcis & Latinis exemplaribus uti refert WOLFIUS, *in Biblioth. Hebrææ part.* 1. *pag.* 133. ſunt & alia exemplaria Hebraica quæ à Wolfio loco citato enumerantur.

EUCLIDIS



EUCLIDIS ELEMENTUM PRIMUM.

TOtus hic primus liber in eo positus est, ut nobis tradat ortus proprietatesque triangulorum, tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter se comparat interdum, interdum vero unumquodque per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera, secundum æqualitatem atque inæqualitatem, rimatur. Idemque variis rationibus inquirit, in duobus quandoque triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumque comtemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, ut cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Ut autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet divisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia hujusmodi. Itaque ut uno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atque parallelogramma.

DEFINITIO. I.

Punctum est, cujus pars nulla est.

ANte omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propositam exorditur à principiis, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, unas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem altitudinemve alteras. Itaque quod in quantitate continua, sive magnitudine existit, intelligiturque sine omni parte, ita ut neque longum, neque latum, neque profundum esse cogitetur, id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum.

DEFINITIO. II.

Linea verò, longitudo latitudinis expers.

DEfinit hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neque profundam.

Mathematici, ut nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum jam descriptum superiore definitione, è loco in locum moveri. Cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Ut si punctum A, fluere intelligatur ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere intervallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quadam

TAB. I. fig. 1.

dam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni privatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit.

DEFINITIO. III.

Lineæ autem termini, sunt puncta.

Docet quod linea qualibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Ut linea AB, extrema habet puncta A, & B. TAB. I. fig. 1.

DEFINITIO. IV.

Recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

Hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur.

Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti, qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum recta fluere concipiatur per brevissimum spatium, ita ut neque in hanc partem, neque in illam deflectat, sed æquabilem quendam motum, atque incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta.

DEFINITIO. V.

Superficies est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.

Post lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, unicamque habet dimensionem, definit

ſuperficiem, quæ ſecundam magnitudinis ſpeciem conſtituit, additque primæ dimenſioni ſecundum longitudinem, alteram ſecundum latitudinem. Nam in ſuperficie reperitur, non ſolum longitudo, ut in linea, verum etiam latitudo, ſine tamen omni profunditate. Ut quantitas ABCD, inter lineas AB, BC, CD, DA, comprehenſa, conſiderataque ſecundum longitudinem AB, vel CD, & ſecundum latitudinem AD, vel BC, omnis expers profunditatis, appellatur ſuperficies.

TAB. I. fig. 2.

Mathematici vero, ut nobis eam ob oculos ponant, monent, ut intelligamus lineam aliquam in tranſverſum moveri: Veſtigium enim relictum ex ipſo motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in tranſverſum eſt factus; nulla vero ratione profundum eſſe poterit, cum linea ipſum deſcribens omni careat profunditate; quare ſuperficies dicetur. Ut ſi linea AB, fluat verſus DC, efficietur ſuperficies ABCD.

DEFINITIO. VI.

Superficiei autem extrema, ſunt lineæ.

NOn diſſimilis eſt hæc definitio ſuperiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates ſuperficiei eſſe lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Ut ſuperficiei ABCD, extrema ſunt lineæ AB, BC, CD, DA.

TAB. I. fig. 2.

DEFINITIO. VII.

Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuas interjacet lineas.

HÆc quoque definitio, ſimilitudinem quandam deſcriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas ſuas interjacet, ita ut media

mediæ partes ab extremis sursum, deorsumve subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicujus marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita ut nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec ulla est alia sublimior, humiliorve, sed omnes æquabiliter protenduntur.

Hæc autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transversum, qui super duas alias lineas rectas conficitur. Ut si linea recta AB, per duas rectas AD, BC, feratur, efficietur superficies perfecte plana. TAB. I. fig. 2.

Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita ut quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana.

DEFINITIO VIII.

Planus vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Declarat, quidnam sit angulus planus, dicens; quandocunque duæ lineæ in plana aliqua superficie invicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex hujusmodi concursu, seu inclinatione unius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ, AB, AC, concurrunt in A, & non jacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum jacere, quando altera ea- TAB. I. fig. 3.

rum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant jacentes in directum, ita ut alterutra producta congruat toti alteri, non fiet ullus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ambæ unam integram lineam constituent. Ut quia recta TAB. I. fig. 4. *AB, producta convenit cum recta BC, non efficietur angulus in B. Quare in directum dicentur jacere. Itaque ut lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, ut post concursum productæ se mutuo secent.*

Consistit autem anguli cujusvis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; lineæ etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem.

DEFINITIO. IX.

Cum autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANgulus omnis planus qui conficitur ex lineis duabus rectis, rectilineus dicitur.

DEFINITIO. X.

Cum vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum. Et quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ejus, cui insistit.

DOcet hoc loco Euclides, quisnam angulus rectilineus apud Geometras appellatur rectus, & quænam linea perpendicularis: si recta linea AB, TAB. I. fig. 5. *rectæ CD, insistens efficiat duos angulos prope punctum*

B,

B, (qui quidem ideo dicuntur à Mathematicis esse deinceps, quod eos eadem linea CD, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se aequales, quod tum demum fiet, quando recta AB, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed aequabiliter rectae, CD, insistet, vocabitur uterque angulus B, rectus, & recta AB, perpendicularis rectae, CD, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta CB, perpendicularis rectae AB: quamvis enim CB, tantum faciat cum AB, unum angulum, tamen si AB, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus aequalis priori.

Itaque ut in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quae ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, ut probemus angulum, qui est ei deinceps, aequalem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quae ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps aequalem quoque esse.

DEFINITIO. XI.

Obtusus angulus est, qui recto major est.

QUando recta AB, rectae CD, insistens non fecerit angulos ad punctum B, aequales, & ob eam causam neutrum rectum, sed unum quidem recto majorem, alterum vero minorem, dicitur major angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis, AB, BC. TAB. I fig. 6.

DEFINITIO. XII.

Acutus vero, qui minor eſt recto.

TAB. I. fig. 6.

Minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus.

Quoniam vero ad quemvis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in uno puncto plures exiſtunt anguli, ſolent Mathematici, ut tollatur confuſio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media oſtendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ vero ſignificant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, angulum obtuſum intelligunt per angulum ABC, acutum vero, per angulum ABD, quod diligenter eſt notandum, ut facile dignoſcamus angulos, quorum mentio fit in demonſtrationibus.

DEFINITIO. XIII.

Terminus eſt, quod alicujus extremum eſt.

Tres ſunt termini juxta hanc definitionem. Punctum enim terminus eſt, ſeu extremum lineæ: Linea ſuperficiei: & ſuperficies corporis. Omne ſiquidem terminatum ſuperat terminum ſuum una dimenſione, ut perſpicuum eſt ex adductis exemplis.

DEFINITIO. XIV.

Figura eſt, quæ ſub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

Non omnis quantitas terminos poſſidens Figura dici poteſt, ne lineam finitam figuram appellare

lare cogamur: Sed eæ solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ, & quæ profunditatem adeptæ quoque sunt; ut solida finita, Figuræ nomine appellabuntur. Hæ enim proprie terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non proprie dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare.

DEFINITIO. XV.

Circulus, est figura plana sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur; ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEfinit hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, quæ unica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab uno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Ut si superficies, seu spatium concludatur unica linea ABC, habueritque hanc conditionem, ut ab aliquo puncto intus suscepto, utpote à D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum ABC, quales sunt DA, DB, DC, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non. TAB. I. fig. 7.

Adjungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis est ABC, appellari Peripheriam, seu, ut Latini exponunt, circumferentiam.

Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur à linea recta

finita circa alterum punctum extremum quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, unde moveri cœperat. Ut si intelligatur recta AD, circa punctum D, quiescens moveri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoveri cœpit, describet ipsa recta totum spatium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam ABC: Erit quoque punctum quiescens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta AD, circumducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur.

TAB. I. fig. 7.

DEFINITIO. XVI.

Hoc vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOcet, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est punctum D.

TAB. I. fig. 7.

DEFINITIO. XVII.

Diameter autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

SI in circulo ducatur recta linea AB, per centrum C, ita ut extrema ejus A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum usque ad peripheriam utrinque extenditur. Unde

TAB. I. fig. 8.

Unde plures assignari poterunt in circulo diametri, unum vero centrum duntaxat.

Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari à diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, utpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, ut propter directum diametri per centrum transitum, utrinque æquales circumferentiæ abscindantur.

DEFINITIO. XVIII.

Semicirculus vero est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

Exempli gratia, in circulo figura ADB, contenta sub diametro AB, & peripheria ADB, dicitur semicirculus; eadem ratione erit figura AEB, semicirculus. TAB. I. fig. 8.

DEFINITIO. XIX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

Omnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur.

DEFINITIO. XX.

Trilateræ quidem, quæ sub tribus.

Affirmans Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur.

DE-

DEFINITIO. XXI.

Quadrilateræ quidem, quæ ſub quatuor.

DEFINITIO. XXII.

Multilateræ autem, quæ ſub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

Quoniam ſpecies rectilinearum figurarum ſunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progreſſum. Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur perſequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumſcribuntur, generali vocabulo Multilateras.

DEFINITIO. XXIII.

Trilaterarum autem figurarum, Æquilaterum eſt Triangulum, quod tria latera habet æqualia.

TAB. I. fig. 9. *Quando omnia tria latera inter ſe æqualia ſunt, ut AB, BC, CA, dicitur triangulum Æquilaterum.*

DEFINITIO. XXIV.

Iſoſceles autem eſt, quod duo tantum æqualia habet latera.

TAB. I. fig. 10. fig. 11. *Uti, ſi duo latera AB & AC. tantum inter ſe ſint æqualia, vel DE & DF, dicetur utrumque triangulum Iſoſceles.*

DE-

DEFINITIO. XXV.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

QUando omnia tria latera inter se sunt inæqualia, uti AB, BC, & CA, dicitur triangulum scalenum. TAB. I. fig. 12.

DEFINITIO. XXVI.

Ad hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

QUando triangulum aliquod habet angulum unum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Ut, si triangulum ABC, unum angulum habeat ad B rectum, dicetur illud triangulum rectangulum. TAB. I. fig. 13.

DEFINITIO. XXVII.

Amblygonium autem, quod obtusum angulum habet.

TRiangulum Amblygonium, sive obtusangulum est, quod unum habet angulum recto majorem. Ut si in triangulo ABC, angulus ad B recto major existat, vocetur triangulum amblygonium. TAB. I. fig. 14.

DE-

DEFINITIO. XXVIII.

Oxygonium vero, quod tres habet acutos angulos.

IN omni porro triangulo, cujus duo quæcunque latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari Basis, sive illud in situ infimum occupet locum, sive supremum.

DEFINITIO. XXIX.

Quadrilaterarum autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

FIgura quadrilatera dicitur Quadratum, cujus quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesque anguli recti. Uti si in figura TAB. II. fig. 1. *quadrilatera ABCD, omnia, quatuor latera, AB, BC, CD, & DA, sint inter se æqualia, & omnes anguli recti, erit illa Quadratum.*

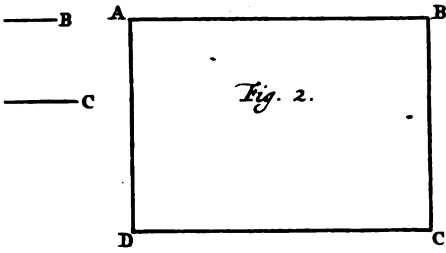
DEFINITIO. XXX.

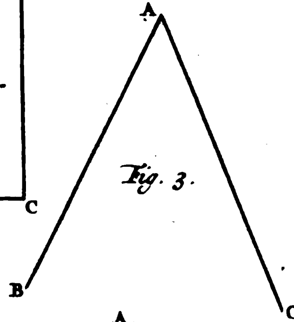
Altera vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

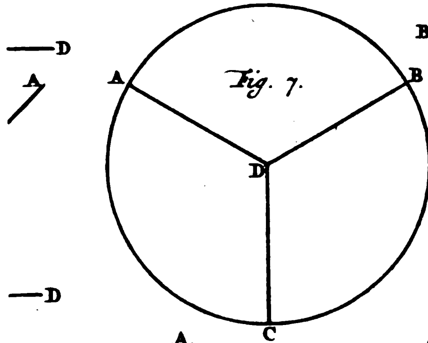
FIgura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamvis bina opposita inter se æqualia existant. Ut, si in figura TAB. II. fig. 2. *ABCD, latera AB, DC, inter se, & AD, BC, inter se quoque æqualia sint.*

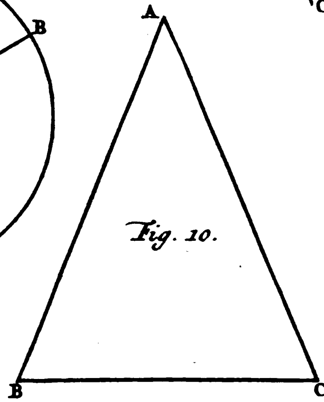
DE-

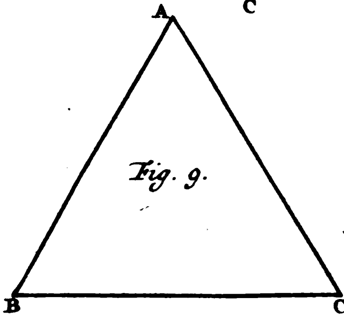
TAB. I.

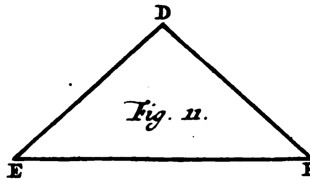

B
C
A
B
Fig. 2.
D
C

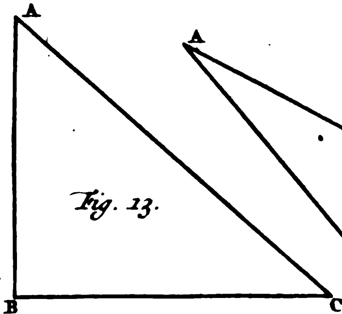

A
Fig. 3.
B
C

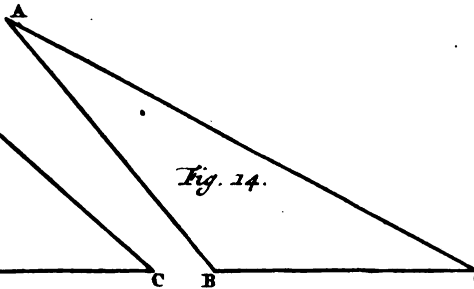

D
A
A
Fig. 7.
B
D
D
C


A
Fig. 10.
B
C


A
Fig. 9.
B
C


D
Fig. 11.
E
F


A
Fig. 13.
B
C


A
Fig. 14.
B
C

DEFINITIO. XXVIII.

Oxygonium vero, quod tres habet acutos angulos.

IN omni porro triangulo, cujus duo quæcunque latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari Basis, sive illud in situ infimum occupet locum, sive supremum.

DEFINITIO. XXIX.

Quadrilaterarum autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

FIgura quadrilatera dicitur Quadratum, cujus quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesque anguli recti. Uti si in figura
TAB. II. fig. 1. *quadrilatera ABCD, omnia, quatuor latera, AB, BC, CD, & DA, sint inter se æqualia, & omnes anguli recti, erit illa Quadratum.*

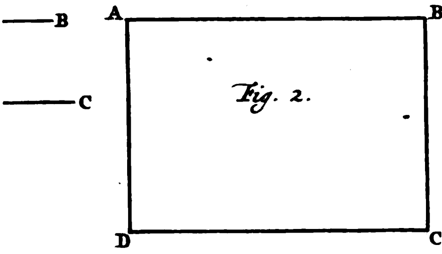
DEFINITIO. XXX.

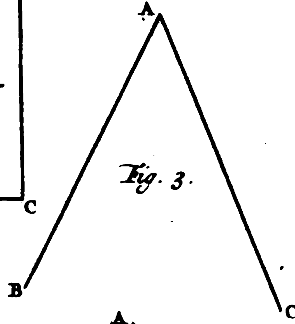
Altera vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

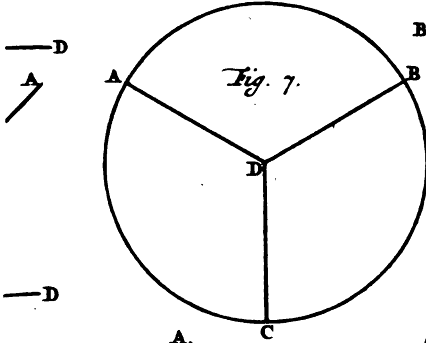
FIgura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamvis bina opposita inter se æqualia existant. Ut, si in figura
TAB. II. fig. 2. *ABCD, latera AB, DC, inter se, & AD, BC, inter se quoque æqualia sint.*

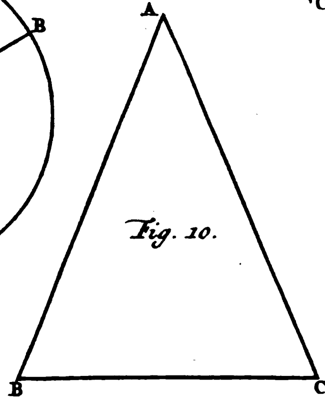
DE-

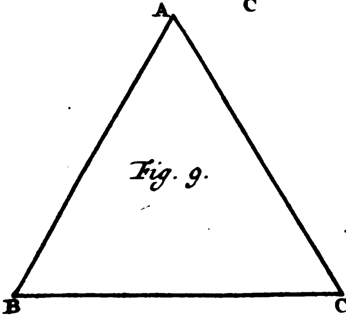
TAB. I.

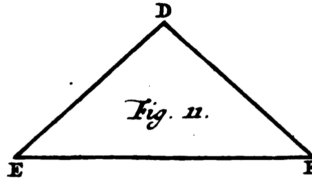

B
C
A
B
Fig. 2.
D
C

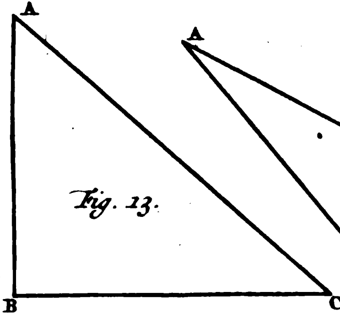

A
Fig. 3.
B
C

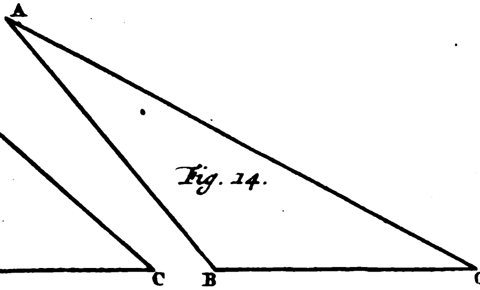

D
A
A
Fig. 7.
B
D
D
C


A
Fig. 10.
B
C


A
Fig. 9.
B
C


D
Fig. 11.
E
F


A
Fig. 13.
B
C


A
Fig. 14.
B
C

DEFINITIO. XXXI.

Rhombus autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.

Figura inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diversas à conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera AB, BC, CD, & DA, æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamvis bini oppositi A & C, B & D inter se æquales existant. TAB. II. fig. 3.

DEFINITIO. XXXII.

Rhomboides vero, quæ adversa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.

Est hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neque ejus latera omnia æqualia sunt, neque ullus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt AB, DC, & AD, BC, in Rhomboide ABCD, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. TAB. II. fig. 4.

DEFINITIO. XXXIII.

Præter has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, Trapezia appellentur.

Reliquas omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita ut neque latera omnia æqualia, neque omnes angulos æquales,

seu

seu rectos, neque latera bina opposita; neque angulos binos oppositos habeant inter sese æquales, qualis est
TAB. II. *figura ABCD, generali vocabulo Trapezia nominat:*
fig. 5. *quæ quidem infinitis modis variari queant.*

DEFINITIO. XXXIV.

Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

UT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, sive æquidistantes, non satis est, ut in quamcunque partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad unum punctum coeant; sed necesse quoque est, ut in una plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in unum conveniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transversum positæ in medio aere, & non se tangentes; hæ etenim nunquam coire possunt.

Dicuntur autem duæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana uni earum accommodata, ita ut omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumvoluta, alteri quoque accommodari potest secundum omnia ejus puncta, quamvis re ipsa in duabus superficiebus diversis reperiantur;
TAB. II. *Ut propositis duabus rectis lineis AB, CD, si superficies aliqua plana rectæ AB, applicetur, omnia ejus*
fig. 6. *tangens puncta, ita ut circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ CD; dicentur hujusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non*

coeant,

coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes, A, C, quam ad, B, D, appellabuntur parallelæ, sive æquidistantes.

Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex una parte longius protractas in unum punctum conventuras, quamvis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disjungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ.

Hic finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adjunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, ut facilius demonstrationes percipiantur.

DEFINITIO. XXXV.

[Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.]

UT figura quadrilatera ABCD, siquidem latus AB, æquidistet lateri DC, & latus AD, lateri BC, nuncupatur Parallelogrammum. TAB. III. fig. 4.

DEFINITIO. XXXVI.

[Cum vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; ap-

pellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.]

TAB. II. fig. 7. *Sit parallelogrammum ABCD, in quo diameter AC, & linea EF, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus AD, BC. Item linea HI, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaque lateribus AB, DC, existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum divisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC, non transit, vocantur à Geometris complementa, sive supplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, ut videre est in præsenti figura.*

PETITIO VEL POSTULATUM. I.

Postuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

Primum hoc postulatum planum admodum est, si recte considerentur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit, ut si punctum quodpiam ad aliud directo moveri intellexerimus, ducta sane sit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum TAB. II. fig. 8. *hic vides à puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodemque aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumera alia ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.*

PE-

PETITIO VEL POSTULATUM. II.

Et rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

Quod si punctum illud ferri adhuc cogitaverimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis hujus productionis, cum punctum illud intelligere possimus moveri ad infinitam distantiam. Sic linea recta AB, producta est primo in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, &c. TAB. II. fig. 9.

PETITIO VEL POSTULATUM. III.

Item quovis centro, & intervallo circulum describere.

Jam vero, si terminatam rectam lineam cujuscunque quantitatis, mente conceperimus applicatam esse secundum alterum extremum ad quodvis punctum, ipsamque circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum revertatur locum, à quo dimoveri coepit; descriptus erit circulus, effectumque, quod tertia petitio jubet. Exemplum habes in his quinque lineis AB, AC, AD, AE, AF, quæ singulæ circa centrum A, circumvolutæ, singulos circulos descripserunt juxta quantitatem, seu intervallum ipsarum. TAB. II. fig. 10.

Præter hæc tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia æque facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decrevi illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ.

PETITIO vel POSTULATUM. IV.

[Item quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel majorem, vel minorem.]

Omnis enim quantitas continua per additionem augeri, per divisionem vero diminui potest infinite: Unde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea major dari possit: neque tam parva, quin minor ea possit exhiberi.

AXIOMA vel PRONUNCIATUM. I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

[Et quod uno æqualium majus est, aut minus, majus quoque est, aut minus altero æqualium. Et si unum æqualium majus est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus est, aut minus.]

Fieri nulla ratione potest, ut duæ quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario major illarum. Et si major æqualis fuerit propositæ quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoque esse.

AXIOMA vel PRONUNCIATUM. II.

Et si æqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, sive compositæ, inæquales forent, proculdubio majori plus esset adjectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantites æquales, conficientur quantitates quoque æquales.

AXIOMA vel PRONUNCIATUM. III.

Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

NAm si reliquæ quantitates forent inæquales, à minore plus fuisset detractum, quam à majore.

AXIOMA vel PRONUNCIATUM. IV.

Et si inæqualibus æqualia adjecta sint, tota sunt inæqualia.

[Et, si inæqualibus inæqualia adjecta sint, majori majus, & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.]

QUin & , si æqualibus inæqualia adjecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam major quantitas addita uni æqualium, majorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adjecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adjiciantur, composita quantitas ex majore, major est, quam composita ex minore.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. V.

Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

[Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à majori minus, & à minori majus, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.]

Sic etiam, si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia major quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuum majoris majus est residuo minoris, si æqualia auferantur ab inæqualibus.

In his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam una & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adjiciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adjiciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VI.

Et 'quæ ejusdem duplicia' sunt, inter se sunt æqualia.

[Et quod unius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium.]

Similiter, quæ ejusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quintuplicia, &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & majus eorum esset

esset duplex, vel triplex, &c. alicujus quantitatis, deficeret utique minus à duplici, vel triplici. &c. Quod si contra, minus esset duplex, vel triplex, &c. quantitatis cujuspiam, excederet sane majus duplex ipsum; vel triplex, &c.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VII.

Et quæ ejusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt.

[Et contra, Quæ æqualia sunt, ejusdem sunt dimidia.]

PAri ratione, quæ ejusdem sunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter se æqualia sunt.

In his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoque sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se æqualia necessario existunt.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

HOc est, duæ quantitates, quarum una superposita alteri, neutra alteram excedit, sed ambæ inter se congruunt, æquales erunt. Ut duæ lineæ rectæ dicentur esse æquales, quando una alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita ut eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando uno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit,

nec ab eo exceditur, sed lineæ illius cum lineis hujus prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamvis lineæ interdum inter se inæquales existant.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. IX.

Et totum sua parte majus est.

Cum pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte majus.

In sequentibus porro pronunciatis interrumpitur ordo Euclidis. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. X.

[Duæ lineæ rectæ non habent unum & idem segmentum commune.]

Non est difficile istud Axioma, si perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, ut duæ lineæ rectæ habeant unam partem, quamvis minimam, communem, præter unicum punctum, in quo se mutuo intersecant.

Possunt tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando unam & eandem rectam lineam constituunt. TAB. II. fig. 9. *Ut in hac figura, rectæ AC, BD, commune habent segmentum BC, quia ambæ unam rectam constituunt lineam AD. At vero quando* TAB. II. fig. 11. *duæ rectæ sunt diversæ, quales sunt AB, CD, non possunt possidere segmentum aliquod commune.*

DE-

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XI.

[Duæ rectæ in uno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt.]

Hoc etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XII. X.

Item, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

Hoc axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuive nequit, sed prorsus est immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, ut faciat utrobique angulos æquales, neque magis in unam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamvis lineæ sint inæquales interdum.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIII. XI.

Et si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

Ut si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & TAB. II. fig. 12.

ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conventuras esse ad aliquod punctum unum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, ut appositum exemplum commonstrat. Ratio hujus perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed æquali semper spatio protenduntur, ut in propos. 28. hujus lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoque eas conventuras tandem esse aliquando in unum punctum.

XII. AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIV.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

TAB. II. fig. 13. *NUllam prorsus habet difficultatem hoc principium. Si enim duæ rectæ lineæ AB, & CB, ex una parte B, coeant ad efficiendum angulum, necessario ex altera parte A, & C, semper magis ac magis disjungentur, si producantur, ut in exemplo proposito perspicuum est. Quare ut superficies, spatiumve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adjungenda est.*

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XV.

[Si æqualibus inæqualia adjiciantur, erit totorum excessus, adjunctorum excessui æqualis.]

HOc, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaque quantitatibus,

AB,

AB, CD, addantur inæquales BE, DF, sitque BE, major quam DF. Et ex BE, auferatur BG, æqualis ipsi DF, ut sit GE, excessus, quo quantitas addita BE, superat quantitatem additam DF. Quoniam igitur æqualibus AB, CD, addita sunt æqualia BG, DF, a *erunt tota AG, CF, æqualia. Quare constat, totam quantitatem AE, superare totam CF, eodem excessu GE, quo magnitudo DF, adjuncta, à magnitudine adjuncta BE, superatur. Quod est propositum.* TAB. II. fig. 14. a 2. pron.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVI.

[Si inæqualibus æqualia adjungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis.]

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus BE, DF, addantur æquales AB, CD. Et ex majore BE, auferatur BG, aequalis ipsi DF, ut GE, sit excessus; quo quantitas BE, quantitatem DF, superat. Quoniam igitur aequalibus BG, DF, addita sunt aequalia AB, CD, a *erunt tota AG, CF, aequalia. Quamobrem tota quantitas AE, superabit totam CF; eodem excessu GE, quo major quantitas proposita BE, minorem DF, superat. Quod est propositum.* TAB. II. fig. 14. a 2. pron.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVII.

[Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.]

AB aequalibus AB, CD, auferantur inaequalia BE, DF. Sitque EG, excessus, quo quantitas BE, superat quantitatem DF; ita ut BG, aequalis sit ipsi DF. Quia igitur ab aequalibus AB, CD, ablata sunt aequalia BG, DF, b *remanebunt* TAB. II. fig. 15. b 3. pron.

AG,

AG, CF, aequalia. Perſpicuum ergo eſt, reſiduum AE, ſuperari à reſiduo CF, eodem exceſſu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, ſuperat. Quod eſt propoſitum.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XVIII.

[Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis.]

TAB. II. fig. 16. *AB inaequalibus AB, CD, auferantur aequalia AE, CF. Sitque BG, exceſſus, quo tota quantitas AB, ſuperat totam quantitatem CD, ita ut AG, aequalis ſit ipſi CD. Quoniam igitur ab aequalibus AG, CD, ablata ſunt aequalia AE, CF, c remanebunt EG, FD, aequalia. Quare reſiduum EB, ſuperabit reſiduum FD, eodem exceſſu BG, quo tota quantitas AB, ſuperat totam quantitatem CD. Quod eſt propoſitum.*

c 3. pron.

In his quoque quatuor proxime poſitis pronunciatis, nomine quantitatum aequalium intelligenda eſt una etiam ſola quantitas multis communis.

AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XIX.

[Omne totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.]

QUoniam omnes partes ſimul ſumptae conſtituunt totum, cujus ſunt partes, manifeſta eſt veritas hujus axiomatis.

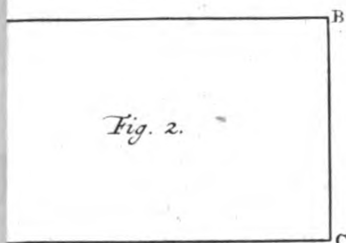
AXIOMA VEL PRONUNCIATUM. XX.

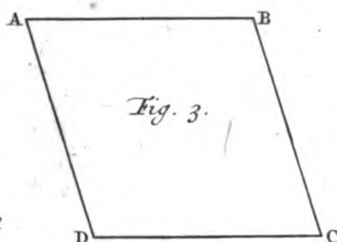
[Si totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.]

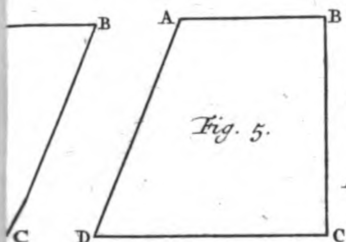
UT quia totus numerus 20. *duplus eſt totius numeri* 10; *Et ablatus ex illo* 6. *ablati ex hoc* 3. *propterea reliquus illius* 14. *duplus eſt etiam reliqui hujus* 7.

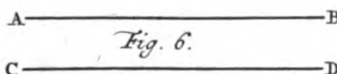
PRO-

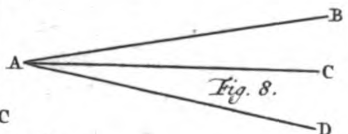
TAB. II.

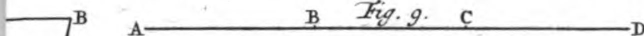

B
Fig. 2.
C

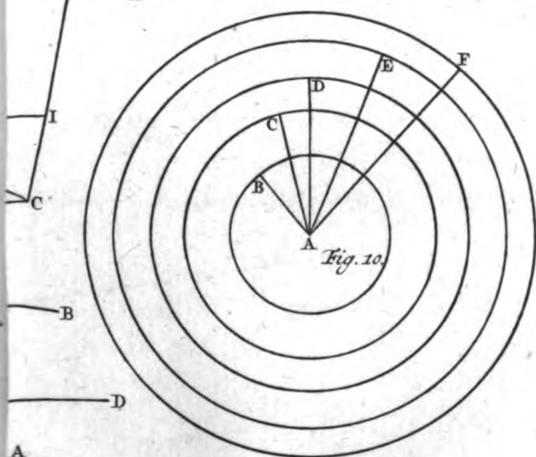

A
B
Fig. 3.
D
C


B
C
A
B
Fig. 5.
D
C

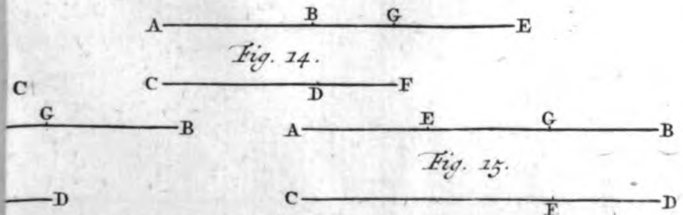

A
B
Fig. 6.
C
D


B
A
C
Fig. 8.
D


Fig. 9.
A
B
C
D


B
I
C
F
E
D
C
B
A
Fig. 10.
B
D
A


A
D
Fig. 11.
B
C


A
B
G
E
Fig. 14.
C
C
D
F
G
B
A
E
G
B
Fig. 15.
D
C
E
D



PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

Super data recta linea terminata triangulum æquilaterum conſtituere.

It igitur propoſita recta linea terminata AB, ſuper quam conſtituere jubemur triangulum aequilaterum. Centro A, & intervallo rectae AB, *a* deſcribatur circulus CBD: Item centro B, & intervallo ejuſdem rectae BA, alius circulus deſcribatur CAD, ſecans priorem in punctis C, & D. Ex quorum utrovis, nempe ex C, *a* ducantur duae rectae lineae CA, CB, ad puncta A, & B; Eritque ſuper rectam AB, conſtitutum triangulum ABC, hoc eſt, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita conſtructum neceſſario eſſe aequilaterum. Quoniam rectae AB, AC, ducuntur ex centro A, ad circumferentiam circuli CBD, *b* erit recta AC, rectae AB, aequalis: Rurſus, quia rectae BC, BA, ducuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli CAD, erit recta BC, rectae BA, aequalis. Tam igitur AC, quam BC, aequalis eſt rectae AB, *c* Quare & AC, BC, inter ſe aequales erunt, atque idcirco triangulum ABC, erit aequilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

TAB. III. fig. 1.

a 3. *pet.*

a 1. *pet.*

b 15. *def.*

c 1. *pron.*

PRO-

ij. PROBLEMA 2. PROPOSITIO. 2.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

TAB. III. fig. 2. 3. Sit punctum datum A, & data recta linea BC, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ BC,
a 3. pet. nempe C, centro, *a* describatur circulus BE, intervallo rectæ BC. Et ex A, ad centrum C,
b 1. pet. *b* recta ducatur AC; (nisi punctum A, intra rectam BC, fuerit: ut in figura 3. Tunc enim pro linea ducta
c 1. primi. sumetur AC,) Super recta vero AC, *c* construatur triangulum æquilaterum ACD, sursum, aut deorsum versus, ut libuerit; cujus duo latera modo constituta DA, DC, versus rectam AC,
d 2. pet. *d* extendantur; DC, quidem oppositum puncto dato A, usque ad circumferentiam in E; DA, vero oppositum centro C, quantum libet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectæ DE,
e 3. pet. per C, centrum transeuntis, *e* alter circulus describatur EG, secans rectam DF, in G. Dico rectam AG, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ BC. Quoniam DE, DG, ductæ sunt ex centro D, ad circumferen-
f 15. def. tiam EG, *f* ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur DA, DC, æqualibus lateribus trianguli
g 3. pron. æquilateri ACD, *g* remanebit AG, æqualis rectæ
a 15. def. CE. Sed eidem CE, *a* æqualis est recta BC. (cum ambæ rectæ CB, CE, cadent ex centro C, ad circumferentiam BE.) Igitur rectæ AG, BC, quandoquidem utraque æqualis est ostensa
b 1. pron. rectæ CE, inter se *b* æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

Quod si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absolvetur problema. Si enim centro C, & interuallo CB,
c 3. petit. *c* describatur circulus, ad cujus circumferentiam
d 1. petit. recta *d* ducatur utcunque; CE, erit hæc posita
e 15. def. ad punctum datum C, *e* æqualis datæ rectæ BC, cum utraque & BC, & CE, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam BE.

PRO-

PROBL. 3. PROPOS. 3. iij.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de majore æqualem minori rectam lineam detrahere.

Sint duæ rectæ inæquales A, minor, & BC, major, oporteatque ex majore BC, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ majoris BC, nempe ad punctum B, *a* ponatur aliqua linea, quæ sit BD, æqualis minori A. Deinde centro B, intervallo autem BD, circulus *b* describatur secans BC, in E. Dico BE, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam BE, *c* æqualis est rectæ BD, & eidem, BD, æqualis est recta A, per constructionem; *d* erunt A, & BE, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.

TAB. III. fig. 4.
a 2. primi.
b 3. pet.
c 15. def.
d 1. pron.

Quod si duæ rectæ datæ conjungantur in uno extremo, quales sunt BD, & BC, conjunctæ in extremo utriusque B; describendus erit circulus ex B, ad intervallum minoris BD. Hic enim auferet BE, æqualem ipsi BD, ut constat ex definitione circuli.

THEOREMA 1. PROPOS. 4. iiij.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique; habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, & unius utrumque latus AB, AC, æquale sit alterius utrique

TAB. III. fig. 5.

lateri

lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & utrumque angulum B, & C, utrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoque esse æquales. Quoniam enim recta AB, rectæ DE, ponitur æqualis, fit, ut si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, *a* ipsæ sibi mutuo congruant, punctumque B, in punctum E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, *b* quod est impossibile. Quod si quis dicat, posito puncto, A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram DE, claudent duæ rectæ lineæ superficiem. *c* quod fieri non potest. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, ut dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, *d* congruet quoque alter alteri, hoc est, recta AC, rectæ DF, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Basis igitur BC, basi EF, congruet quoque: alias si supra caderet, aut infra, ut efficeretur recta EGF, EHF, clauderent duæ rectæ EF, EGF; vel EF, EHF, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quam EHF, rectam esse, cum utraque ponatur esse eadem, quæ recta BC.) quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiem *e* claudere non possunt. Quocirca *f* basis BC, basi EF, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC, triangulo DEF; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, aequalis ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

a 8. pron. *b* 10. pron. *c* 14. pron. *d* 8. pron. *e* 14. pron. *f* 8. pron.

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 5.

Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.

Sit triangulum Isosceles ABC, in quo latera, AB, AC, inter se sint æqualia. Dico angulos ABC, ACB, supra basim BC, æquales inter se esse: Item si latera æqualia AB, AC, producantur quantum libuerit, usque ad puncta D, & E, angulos quoque DBC, ECB, infra basim eandem BC, esse æquales. Ex linea enim AE, producta infinite *a* abscindatur AF, æqualis ipsi AD, *b* & ducantur rectæ BF, CD. Considerentur deinde duo triangula ABF, ACD. Quia ergo duo latera AB, AF, trianguli ABF, æqualia sunt duobus lateribus AC, AD, trianguli ACD, utrumque utrique, nempe AB, ipsi AC, ex hypothesi, & AF, ipsi AD, ex constructione; angulusque A, contentus lateribus AB, AF, æqualis est angulo A, contento lateribus AC, AD, immo angulus A, communis est utrique triangulo: *c* Erit basis BF, æqualis basi CD, & angulus F, angulo D, & angulus ABF, angulo, ACD; cum & priores duo, & posteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, ut patet: Rursus considerentur duo triangula BDC, CFB. Quoniam vero rectæ AD, AF, æquales sunt, per constructionem, fit ut, si auferantur ex ipsis æquales AB, AC, *d* & reliquæ BD, & CF, sint æquales. Quare duo latera BD, DC, trianguli BDC, æqualia sunt duobus lateribus CF, FB, trianguli CFB, utrumque utrique, videlicet BD, ipsi CF, & DC, ipsi FB, ut probatum est: Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis lateribus æqualibus æquales, ut ostensum etiam fuit. Igitur erit angulus

TAB. III. fig. 6.

a 3. primi.

b 1. post.

c 4. primi.

d 3. primi.

C *e* DBC,

e 4. primi. e DBC, angulo FCB, æqualis; & angulus BCD, angulo CBF. Tam enim priores duo, quam posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntque supra communem basim BC, utriusque trianguli BDC, CFB. Quod si ex totis angulis æqualibus ABF, ACD, (quos æquales esse jam demonstravimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales CBF, BCD, (quos itidem in posterioribus triangulis modo probavimus esse
f 3. pron. æquales) f remanebunt anguli ABC, ACB, supra basim BC, æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos DBC, FCB, qui quidem sunt infra eandem basim BC, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandem inter se sunt æquales; ac propterea Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres
TAB. III, fig. 7. angulos cujuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum ABC. Quoniam
a 5. primi. igitur duo latera AB, AC, sunt æqualia, a erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera AB, BC, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.

vi. THEOR. 3. PROPOS. 6.

Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

TAB. III. fig. 8. IN triangulo ABC, sint duo anguli ABC, ACB, super latus BC, æquales. Dico duo latera illis opposita AB, AC, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum majus

jus altero; sit igitur AB, majus quam AC, si fieri potest: Et ex AB, *b* abscindatur in D, recta BD, æqualis rectæ AC, (quæ minor dicitur esse quam AB,) ducaturque recta CD. Considerentur jam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia sint duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, utrumque utrique, nempe AC, ipsi DB, (abscidimus enim ex AB, ipsi AC, concessu adversarij, æqualem DB,) & CB, ipsi BC, cum sit unum & idem; Sint autem & anguli ACB, DBC, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: *c* Erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totum & pars, quod fieri non potest *d*. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, si anguli B, & C, super latus BC, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli, duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.

b 3. primi

c 4. primi

d 9. pron.

CORÓLLARIUM.

Sequitur ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cujus omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conversum est corollarii quintæ propositionis, ut liquet. Sint enim trianguli ABC, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, *a* erunt latera AB, AC, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera AC, BC, æqualia, & idcirco omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia. Quod ostendendum erat.

TAB. III. fig. 7.

a 6. primi.

THEOR. 4. PROPOS. 7. vii.

Super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum: ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

Super recta AB, constituantur ad punctum quodvis C, duæ rectæ lineæ AC, BC. Dico super

TAB. III. fig. 9. 10, 11, 12. 13

ſuper eandem rectam AB, verſus partem eandem C, non poſſe ad aliud punctum, ut ad D, conſtitui duas alias rectas lineas, quæ ſint æquales lineis AC, BC, utraque utrique, nempe AC, ipſi AD, quæ eundem habent terminum A; & BC, ipſi BD, quæ eundem etiam terminum poſſident B. Sint enim, ſi fieri poteſt, rectæ AC, AD, inter ſe, & rectæ BC, BD, inter ſe etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum AC, BC, ita ut recta AD, in ipſam rectam AC, vel, BD, in ipſam BC, cadat; aut intra triangulum ABC; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum AC, BC, nempe in AC, ut AD, ſit pars ipſius AC. Quoniam igitur rectæ AC, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars AD, toti AC, æqualis. *f* Quod fieri non poteſt. Sit deinde punctum D, intra triangulum ABC; & ducta recta CD, producantur rectæ BC, BD, uſque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo ACD, ponuntur latera AC, AD, æqualia, *a* erunt anguli ACD, ADC, ſuper baſim CD, æquales; *b* Eſt autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE. Quare angulus CDF, pars ipſius ADC, multo minor erit eodem angulo DCE. Rurſus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur æqualia, *c* erunt anguli CDF, DCE, ſub baſi CD, æquales. Oſtenſum autem fuit, quod idem angulus CDF, multo ſit minor angulo DCE. Idem ergo Angulus CDF, & minor eſt angulo DCE, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Sit poſtremo punctum D, extra triangulum ABC. Aut igitur in tali erit loco, ut una linea ſuper alteram cadat, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipſum D; ex quo rurſus colligetur pars æqualis toti, quod eſt abſurdum. Aut in tali erit loco, ut poſteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ſi modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo poſito, in idem abſurdum incidemus, nempe angulum DCF, & minorem

TAB. III. fig. 9.

f 9. pron.

TAB. III. fig. 10.

a 5. primi.

b 9. pron.

c 5. primi.

TAB. III. fig. 11.

TAB. III. fig. 12.

rem esse angulo CDE, & eidem æqualem, ut perspicuum est. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum ABC, ut altera linearum posteriorum, nempe AD, secet alteram priorum, ut ipsam BC. Ducta igitur recta CD, cum in triangulo ACD, latera AC, AD, ponantur æqualia, *d* erunt anguli ACD, ADC, supra basim CD, æquales: Ac proinde *e* cum angulus ADC, minor sit angulo BDC, pars toto, erit & angulus ACD, minor eodem angulo BDC. Quare multo minor erit angulus BCD, pars anguli ACD, angulo eodem BDC. Rursus cum in triangulo BCD, latera BC, BD, ponantur æqualia, *a* erunt anguli BCD, BDC, super basim CD, æquales: Est autem jam ostensum, angulum BCD, multo esse minorem angulo BDC. Idem igitur angulus BCD, & minor est angulo BDC, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se AC, AD, nec inter se quoque BC, BD. Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis. &c. Quod erat demonstrandum.

TAB. III. fig. 13.

d 5. prim.

e 9. pron.

a 5. prim.

THEOR. 5. PROPOS. 8. viij.

Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, utrumque utrique, æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

Sint duo latera AB, AC, trianguli ABC, duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqualia, utrumque utrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; sit autem & basis BC, basi EF, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum videlicet uterque dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis BC, superponi basi EF, *a* neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C,

TAB. III. fig. 14.

a 8. pron.

puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum ABC, cogitetur cadere super triangulum DEF, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, aut alio. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadet, congruent sibi mutuo triangulo-
a 8. pron. rum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea *a* angulus A, æqualis erit Angulo D, cum neuter alterum
fig. 14. 15. 16. excedat. Quod si punctum A, aliò dicatur cadere, ut ad G, quomodocumque id contingat, hoc est, sive in latus ED, sive intra triangulum EDF, sive extra, ut in figuris apparet; erit perpetuo EG, (quæ eadem est, que BA,) æqualis ipsi ED; & FG, (quæ eadem est, quæ CA,) æqualis ipsi FD, propterea quod latera unius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc
b 7. primi. autem fieri non posse, jam dudum *b* demonstratum est, cum tam rectæ EG, ED, terminum eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Si duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, utrumque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrumque utrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

TAB. III. fig. 14. *Sit enim basis BC, æqualis basi EF, & angulus B, angulo E, angulusque C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale esse, angulumque A, angulo D. Nam*
a 8. pron. *si basis basi superponatur,* a *congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare*

Quare omnia sibi congruent, proptereaque omnia inter sese æqualia erunt.

COROLLARIUM.

Porro ex antecedente hujus octavæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, utrumque utrique, ut angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F, immo totum triangulum toti triangulo, ut constat ex eadem superpositione unius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, ut perspicuum est. *TAB. III. fig. 14.*

PROBL. 4. PROPOS. 9.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit dividendus rectilineus angulus BAC, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta AB, sumatur quodcunque punctum D, & rectæ AD, *a* secetur ex AC, recta AE, æqualis, ducaturque recta DE. Deinde super DE, *b* constituatur triangulum æquilaterum DFE, & ducatur recta AF, dividens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia sint lateribus EA, AF, trianguli EAF, utrumque utrique, quod DA, ipsi EA, per constructionem, sit æquale, & AF, commune; Sit autem & basis DF, basi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, constructum est æquilaterum: *c* Erit angulus DAF, angulo EAF, æqualis, ideoque angulus BAC, divisus bifariam, quod erat faciendum.

TAB. III. fig. 17.
a 3. *primi.*
b 1. *primi.*
c 8. *primi.*

PROBL. 5. PROPOS. 10.

Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

TAB. IV. fig. 1. SIt recta finita AB, dividenda bifariam, id est in duas partes æquales. *a* Describatur super AB, triangulum æquilaterum ABC, cujus angulus C, per rectam CD, *b* dividatur bifariam, rectaque CD, rectam AB, secet in D. Dico rectam AB, bifariam esse divisam in D. Quoniam duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia sunt duobus lateribus BC, CD, trianguli BCD, utrumque utrique, nempe AC, ipsi BC, cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & CD, est commune; Est autem & angulus ACD, angulo BCD, æqualis, per constructionem: *c* Erit basis AD, basi BD, æqualis. Datam ergo rectam AB, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.

a 1. primi. *b* 9. primi. *c* 4. primi.

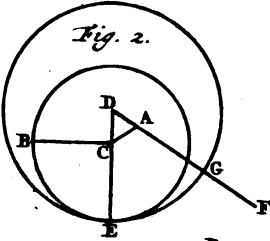
PROBL. 6. PROPOS. 11.

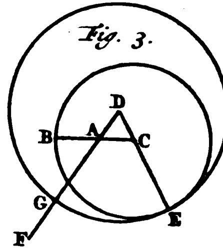
Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

TAB. IV. fig. 2. REcta linea data sit AB; & in ea punctum C, à quo jubemur erigere super AB, lineam ad Angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta CD, *a* cui æqualis auferatur CE. Deinde super DE, *b* constituatur triangulum æquilaterum DEF, atque ex F, ad C, ducatur recta FC, quam dico esse perpendicularem ad AB. Quoniam latera DC, CF, trianguli DCF, æqualia sunt lateribus EC, CF, trianguli ECF, utrumque utrique, nempe DC, ipsi EC, per constructionem, & CF, commune; Est vero & basis DF, basi EF, æqualis, ob triangulum æquilaterum: *c* Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. *d* Quare dicetur uterque rectus,

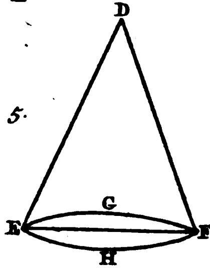
a 3. primi. *b* 1. primi. *c* 8. primi. *d* 10. def.

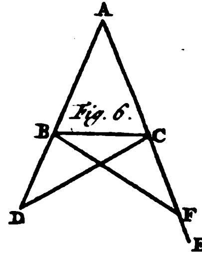
TAB. III.

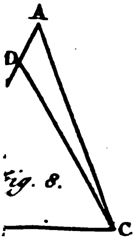

Fig. 2.
D
A
B
C
G
F
E

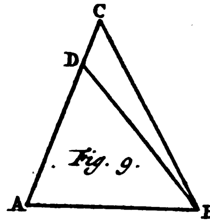

Fig. 3.
D
B
A
C
G
E
F

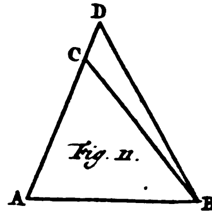

A
C

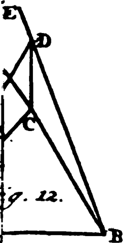

D
Fig. 5.
G
E
F
H

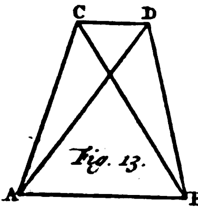

A
Fig. 6.
B
C
D
F
E

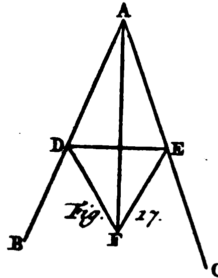

A
D
ig. 8.
C


C
D
Fig. 9.
A
B

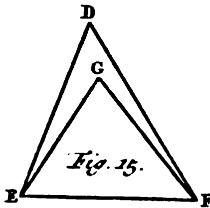

D
C
Fig. 11.
A
B

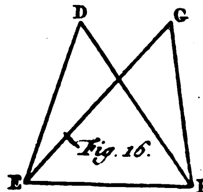

E
D
C
g. 12.
B


C
D
Fig. 13.
A
B


A
D
E
Fig. 17.
B
F
C


F


D
G
Fig. 15.
E
F


D
G
Fig. 16.
E
F

rectus, atque adeo FC, recta, ad AB, perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. 7. PROPOS. 12. xij.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Sit recta AB, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, à quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam AB. Centro C, intervallo vero quolibet circulus describatur *e* secans AB, in D, & E, (quoniam intervallum assumptum tantum esse debet, ut transcendat rectam AB; alias eam non secaret.) *a* Divisa autem recta DE, bifariam in F, ducatur recta CF, quam dico perpendicularem esse ad AB. Si enim ducantur CD, CE, erunt duo latera DF, FC, trianguli DFC, æqualia duobus lateribus EF, FC, trianguli EFC, utrumque utrique, per constructionem; est autem & basis CD, basi CE, æqualis, *d* cum hæ sint ex centro C, ad circumferentiam. Quare *b* erit angulus DFC, angulo EFC, æqualis, & propterea uterque rectus *c*: Ducta est igitur CF, perpendicularis, quod faciendum erat.

TAB. IV. fig. 3.
e 3. petit.
a 10. primi
d 15. def.
b 8. primi
c 10. def.

THEOR. 6. PROPOS. 13. xiij.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

Recta linea AB, consistens super rectam DC, faciat duos angulos ABC, ABD. Si igitur AB, fuerit perpendicularis ad CD, *c* erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet unum quidem angulum obtu-

TAB. IV. fig. 4.
c 10. def.

sum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. *d* Educatur enim BE, ex B, perpendicularis ad CD, ut sint duo anguli EBC, EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus EBD, *e* æqualis est duobus DBA, ABE; *f* erunt, apposito communi angulo recto EBC, duo recti EBD, EBC, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Rursus quia *g* angulus ABC, duobus angulis ABE, EBC, æqualis est; *a* erunt, apposito communi angulo ABD, duo anguli ABC, ABD, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiam esse duos rectos EBD, EBC; quæ autem eidem æqualia, *b* inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli ABC, ABD, æquales sunt duobus rectis EBD, EBC. Cum ergo recta linea supra rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

d 11. primi
e 19. pron.
f 2. pron.
g 19. pron.
a 2. pron.
b 1. pron.

xiv. THEOR. 7. PROPOS. 14.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

TAB. IV. fig. 5.

AD punctum C, lineæ rectæ AB, in diversas partes eductæ sint duæ rectæ CD, CE, facientes cum AB, duos angulos ACD, ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas CD, CE, inter se esse constitutas in directum, ita ut DCE, sit una linea recta. Si enim non est recta DCE; producta DC, ad partes C, in directum, & continuum, cadet aut supra CE, ut sit recta DCF, aut infra CE, ut sit recta DCG. Si cadit supra, cum AC, consistat super rectam DCF, *a* fient duo anguli ACD, ACF, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis; *b* & omnes

a 13. primi
b 12. pron.

omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt æquales, ablato igitur communi angulo ACD, *c* remanebunt anguli ACF, ACE, inter se æquales, pars & totum, *d* quod est absurdum. Non igitur recta DC, producta cadet supra CE; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, æquales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quæ CE; propterea que, si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

c 3. pron.
d 9. pron.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

SEcent se duæ rectæ AB, CD, in puncto E, utcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet AED, angulo BEC, & angulum AEC, angulo BED. Quoniam recta DE, consistit super rectam AB, *b* erunt duo anguli AED, DEB, æquales duobus rectis. Rursus quia recta BE, super rectam CD, consistit, erunt eadem ratione duo anguli CEB, BED, duobus rectis æquales. Cum igitur *c* omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis DEB, BEC, æquales. Dempto igitur communi angulo DEB, *d* remanebit angulus AED, angulo BEC, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos AEC, BED, inter se æquales esse. Nam duo anguli AEC, CEB, *e* qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoque angulis DEB, BEC, qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi BEC, *f* remanebunt anguli AEC, BED, æquales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

TAB. IV. fig. 6.
b 13. primi
c 12. primi
d 3. pron.
e 13. primi
f 3. pron.

COROLLARIUM. I.

Euclides colligit ex demonstratione hujus theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas se mutuo secantes, efficere ad punctum sectionis quatuor angulos, quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIUM. II.

Eadem ratione colligemus, omnes angulos circa unum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex, E, aliæ lineæ quotlibet educantur, dividentur solummodo illi quatuor anguli ad E, constituti, in plurimas partes, a quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alii simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circumstans, æquivalere quatuor rectis angulis, ut multi auctores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se invicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

a 19. pron.

EX PROCLO.

Si ad aliquam rectam lineam, ad ejusque signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

TAB. IV. fig. 6. *Ex puncto E, rectæ AB, in diversas partes egrediantur duæ rectæ ED, EC, facientes angulos AED,*

AED, BEC, inter se æquales: Vel etiam duos AEC, BED. Dico duas EC, ED, efficere unam lineam rectam. Quoniam enim angulus AED, æqualis est angulo BEC; addito communi angulo BED, b erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis CEB, BED, æquales: Sed c anguli AED, DEB, sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo CEB, BED, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem EC, ED, a erunt linea una recta. Hoc autem, ut vides, conversum est propositionis decimæquintæ. b 2. primi c 13. primi a 14. primi

THEOR. 9. PROPOS. 16. xvj.

Cujuscunque trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno, & opposito, major est.

TRianguli ABC, latus BA, producatur ad D. Dico angulum externum DAC, majorem esse interno, & opposito ACB, itemque majorem interno, & opposito ABC. Dividatur *a* enim AC, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta BEF, ita ut EF, *b* abscissa sit æqualis rectæ EB; ducaturque recta FA. Quoniam igitur latera CE, EB, trianguli CEB, æqualia sunt lateribus AE, EF, trianguli AEF, utrumque utrique, per constructionem; Sunt autem & Anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, *c* inter se æquales, cum sint circa verticem E, & oppositi: Erit *d* basis CB, æqualis basi AF, & angulus ECB, angulo EAF; Est autem angulus DAC, externus major angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, major erit interno, & opposito angulo ACB. Quod si latus CA, producatur ad G; & AB, dividatur bifariam in H; extendaturque recta CHI, ut HI, æqualis sit rectæ HC, & ducatur recta IA: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum GAB, majorem esse interno angulo, & opposito ABC; Est autem *e* angulus DAC, angulo

TAB. IV. fig. 7. a 10. primi b 3. primi c 15. primi d 4. primi e 15. primi

angulo GAB, æqualis, cum lineæ BD, CG, se mutuo secent in A. Igitur & angulus DAC, major erit interno & opposito angulo ABC. Est autem idem angulus DAC, major quoque ostensus angulo interno & opposito ACB. Cujuscunque ergo trianguli uno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.

xvij. THEOR. 10. PROPOS. 17.

Cujuscunque trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

TAB. IV. fig. 8. Sit triangulum ABC; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores esse duobus rectis; Item duos CBA, & CAB; Itemque duos BAC, & BCA. Producantur enim duo quævis latera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur *d 16. primi* *d* angulus ABD, externus major est interno & opposito angulo ACB; si addatur communis *e 4. pron.* angulus ABC, *e* erunt duo anguli ABD, ABC, *f 13. primi* majores duobus angulis ABC, ACB: *f* Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur ABC, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus ex- *g 16. primi* ternus ABD, *g* major sit angulo CAB, interno, *h 4. pron.* & opposito; *h* erunt, apposito communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, majores duobus *i 13. primi* angulis CAB, CBA. Cum ergo *i* duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alii duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. *m 16 prim.* Cum enim angulus externus BAE, *m* major sit interno & opposito angulo BCA; si apponatur *n 4. pron.* communis angulus BAC, *n* erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, *o 13. primi* majores: ac proinde cum illi duo *o* sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cujusque igitur trianguli, &c. Quod demonstrandum erat.

EX PROCLO.

Hinc perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quam unam. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam BC, duæ perpendiculares AB, AC. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdum. a Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam una, ex A, ad BC, deduci possunt. Quod est propositum. TAB. IV. fig. 11. a 17. primi

COROLLARIUM. I.

Constat etiam ex his, in omni triangulo, cujus unus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si unus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis majores esse fateamur.

COROLLARIUM. II.

Sequitur etiam ex hac propos. si linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, unum acutum, & obtusum alterum, lineam perpendicularem ex quovis ejus puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli: Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtusum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam si non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat si fieri potest, ad partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtusus & rectus, in triangulo ABC, majores sunt duobus rectis; b sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadit. TAB. IV. fig. 9. b 17. primi

CO-

COROLLARIUM. III.

Pari ratione fit ex hac propos. manifestum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli
c 5. primi Isoscelis supra basin, esse acutos. Nam c cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Isoscele
d 17. primi supra basin sint inter se æquales; d sintque simul tam illi duo, quam hi duobus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut majores.

xviij. THEOR. 11. PROPOS. 18.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

TAB. IV. fig. 10. IN triangulo ABC, sit latus AC, majus latere AB. Dico angulum ABC, subtensum à majori latere AC, majorem esse angulo ACB, qui à minori latere AB, subtenditur. Nam ex
a 3. primi AC, a auferatur AD, æqualis ipsi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera
b 5. primi AB, AD, æqualia sunt per constructionem, b erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem
c 16 prim. c angulus ADB, major angulo ACB. Igitur & angulus ABD, major erit angulo ACB. Qua-
d 9. pron. mobrem cum d angulus totus ABC, major adhuc sit angulo ABD; erit angulus ABC, multo major angulo ACB. Eadem ratione, si latus AC, majus ponatur latere BC, ostendes angulum ABC, majorem esse angulo BAC; si nimirum ex CA, abscindatur linea æqualis ipsi CB, &c. Quare omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

TAB. IV. fig. 11. Ex hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cujus

cujus maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico ejusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus AC, ponatur majus latere AB, erit per hanc propos. angulus B, angulo C, major. Eadem ratione major erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, majus ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter utrumque tenens.

THEOR. 12. PROPOS. 19. xix.

Omnis trianguli major angulus majori lateri subtenditur.

IN triangulo ABC, angulus B, major sit angulo C. Dico latus AC, subtendens majorem angulum B, majus esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus AC, majus non est latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale esse ipsi AB, *a* erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & major per hypothesin, quod est absurdum. Si vero AC, minus esse dicatur latere AB, *d* erit angulus B, subtensus à minori latere AC, minor angulo C, subtenso à majore latere AB; Ponitur autem major, quod magis est absurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale sit lateri AB, neque minus eo, erit majus. Eadem ratione probabitur, latus AC, majus esse latere BC, si angulus B, major esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli major angulus majori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

TAB. IV. fig. 10.

a 5. primi

d 18. primi

COROLLARIUM.

Sequitur ex hac propos. omnium rectarum ex quovis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarum AD, sola sit perpendicularis ad BC,

TAB. IV. fig. 11.

BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola una perpendicularis duci possit, ut ex Proclo ad propos. 17. demonstravimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli
b 17. primi ADE, AED, *b* sint duobus rectis minores, ponaturque
c 19. primi ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare *c* majus erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas majores esse recta AD, ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.

xx. THEOR. 13. PROPOS. 20.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora, quomodocunque assumpta.

TAB. IV. fig. 13. SIt triangulum ABC. Dico quælibet ejus duo latera, nempe AB, AC, simul majora esse reliquo latere BC. Producatur unum ex illis,
e 3. primi ut CA, usque ad D, *e* sitque recta AD, æqualis alteri lateri non producto AB, & ducatur recta DB. Quoniam igitur duo latera AB, AD,
f 5. primi æqualia inter se sunt, per constructionem, *f* erunt anguli ABD, ADB, æquales inter se: Est autem
g 9. pron. angulo ABD, *g* major angulus CBD. Igitur & angulus CBD, major erit angulo ADB. In triangulo ergo CBD, latus CD, oppositum majori
h 19. primi angulo CBD, *h* majus erit latere BC, quod minori angulo CDB, opponitur. Cum igitur duo latera AB, AC, simul æqualia sint ipsi CD, (si enim æqualibus AB, AD, commune addatur AC,
i 2. pron. *i* fient tota æqualia; nimirum linea composita ex AB, AC, & linea composita ex AD, AC,) erunt quoque latera AB, AC, simul majora latere BC. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera majora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 14. PROPOS. 21. xxi.

Si super trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

IN triangulo ABC, super extremitates B, & C, lateris BC, intra triangulum constituantur duæ rectæ lineæ BD, CD, in puncto D, concurrentes. Dico BD, CD, simul minores esse duobus lateribus BA, CA, simul; At vero angulum BDC, majorem angulo BAC. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe BD, ad punctum E, lateris CA. Quoniam igitur in triangulo BAE, duo latera BA, AE, *e* majora sunt latere BE, si addatur commune EC, *a* erunt BA, AC, majora, quam BE, EC. Rursus quia in triangulo CED, duo latera CE, ED, *b* majora sunt latere CD, si commune apponatur DB, *c* erunt CE, EB, majora, quam CD, DB. Ostensum vero jam fuit, AB, AC, majora esse, quam BE, EC. Multo igitur majora erunt BA, CA, quam BD, CD, quod primo proponebatur. Præterea, quoniam angulus BDC, *d* major est angulo DEC, externus interno; & angulus DEC, angulo BAC, major quoque est, eandem ob causam. Erit angulus BDC, multo major angulo BAC, quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli uno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.

TAB. IV. fig. 14.

e 20 primi
a 4. pron.
b 20 primi
c 4. pron.
d 16. primi

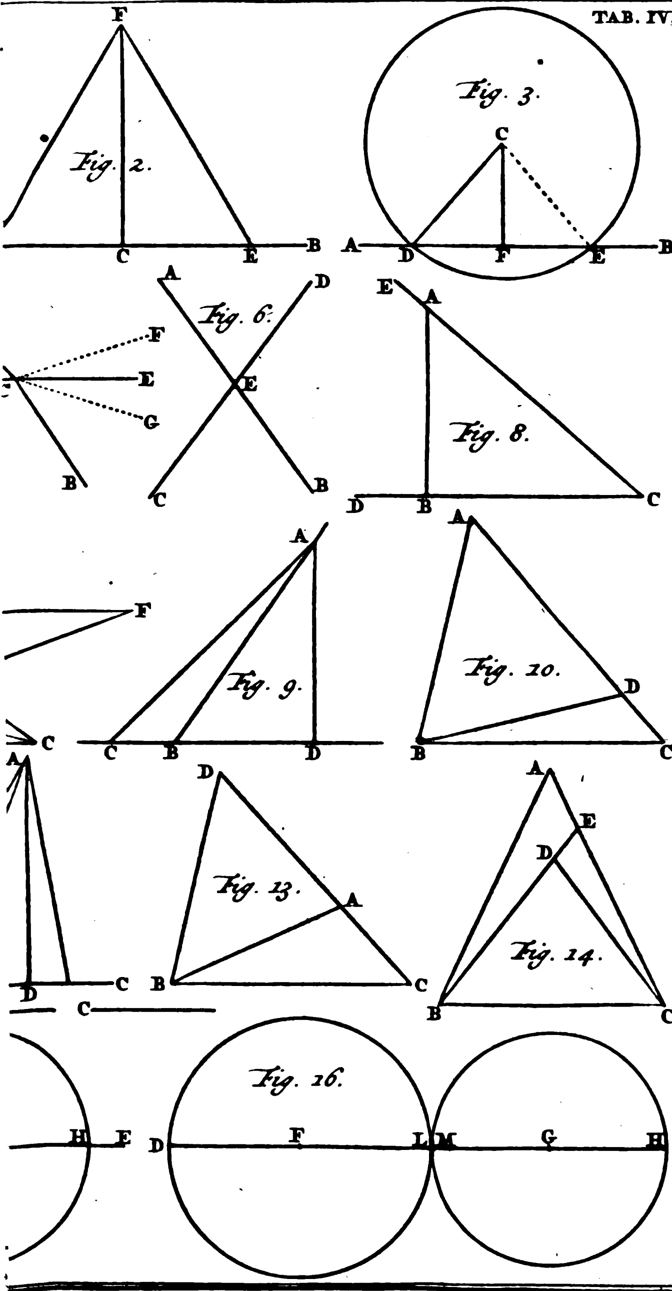
PROBL. 8. PROPOS. 22. xxij.

Ex tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse majores

jores omnifariam sumptas: quoniam uniuscujusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt majora.

TAB. IV. fig. 15. TRes lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua sint majores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, ut constat ex proposition. 20. in qua ostensum fuit, duo quævis latera trianguli reliquo esse majora.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quavis DE, infinitæ magnitudinis
a 3. primi *a* abscindatur recta DF, æqualis rectæ A. Et ex reliqua FE, recta FG, æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, recta GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, intervallo vero FD, circulus describatur DIK. Item centro G, intervallo autem GH, alius circulus describatur HIK, qui necessario priorem secabit in punctis I, & K, (cum enim duæ FD, GH, majores ponantur recta FG; si ex FE, sumatur recta FL, æqualis ipsi FD: & ex GD, recta GM, æqualis ipsi GH, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque
fig. 16. M, caderet in L, punctum, essent GM, FL,
TAB. V. hoc est, GH, & FD, æquales rectæ FG: Si vero
fig. 1. M, caderet inter G, & L, essent eædem duæ FL, GM, hoc est, DF, GH, minores recta FG,
TAB. IV. quorum utrumque est contra hypothesin. Id
fig. 15. quod ex appositis figuris apparet) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta, F, G, rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cujus latera dico æqualia esse datis
b 15. def. rectis A, B, & C. Cum enim recta FK, *b* æqualis sit rectæ FD, & recta A, per constructio-
a 1. pron. nem eidem FD, æqualis; *a* erit latus FK, rectæ A, æquale. Rursus quia GK, æqualis est ipsi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt.

TAB. IV.


Fig. 2.
F
C
E
B
Fig. 3.
C
A
D
F
E
B
Fig. 6.
A
D
E
C
B
F
E
G
B
Fig. 8.
E
A
D
B
C
F
Fig. 9.
A
C
B
D
Fig. 10.
A
D
B
C
C
A
D
C
Fig. 13.
D
A
B
C
C
Fig. 14.
A
E
D
B
C
Fig. 16.
H
E
D
F
L
M
G
H

ſunt. Conſtituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

PROBL. 9. PROPOS. 23. xxiij.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

DAta recta ſit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus DEF. Oportet igitur ad rectam AB, in puncto C, angulum conſtituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis ED, EF, duo puncta utcunque G, H, quæ recta GH, connectantur: Deinde *a* conſtituatur triangulum CIK, habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, ita ut CI, æquale ſit ipſi EG; & CK, ipſi EH; & IK, ipſi GH. (Quod facile fiet, ſi CI, ſumatur æqualis ipſi EG, & CL, ipſi EH, & IM, ipſi GH. Deinde ex centris C, & I, intervallis vero CL, & IM, circuli deſcribantur ſecantes ſeſe in K, &c.) Dico angulum C, æqualem eſſe angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia ſunt duobus lateribus EG, EH, utrumque utrique, & baſis IK, baſi GH, per conſtructionem; *b* erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.

TAB. V. fig. 2.

a 22 primi

b 8. primi

THEOR. 15. PROPOS. 24. xxiv.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint; utrumque utrique, angulum vero angulo majorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſin baſi majorem habebunt.

DUo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus, DE, DF, trianguli DEF, utrumque

TAB. V. fig. 3.

 que

queutrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Angulus vero A, major sit angulo EDF. Dico Basin BC; majorem esse base EF. Ad lineam
b 23 primi enim DE, ad ejusque punctum D, b constituatur angulus EDG, æqualis angulo A; (cadetque recta DG, extra triangulum DEF, cum angulus EDF, minor ponatur angulo A) ponaturque
c 3. primi DG, æqualis ipsi DF, c hoc est, ipsi AC. Ducta deinde recta EG, cadet ea aut supra rectam EF; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primum supra EF, ducaturque recta FG. Quia ergo latera AB, AC, æqualia sunt lateribus DE, DG, utrumque utrique, & angulus A, æqualis angulo
d 4. primi EDG, per constructionem: d Erit basis BC, basi EG, æqualis. Rursus quia duo latera DF, DG,
e 5. primi inter se sunt æqualia; e erunt anguli DFG, DGF,
f 9 pron. æquales: Est autem angulus DGF, f major angulo EGF. Igitur & angulus DFG, eodem angulo EGF, major erit. Quare multo major erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In
a 19. primi triangulo igitur EFG, a majus erit latus EG, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Major igitur erit quoque BC, quam EF. Quod est propositum.

Cadat deinde EG, (ut in figura 4.) in ipsam EF.
b 4 primi Et quia rursus, ut prius, basis EG, b æqualis
c 9. pron. est basi BC: & EG, c major quam EF, erit & BC, major, quam EF, quod est propositum.

TAB. V. fig. 5. Cadat tertio EG, infra EF, producanturque rectæ DF, DG, usque ad H, & I, & ducatur
d 4. primi recta FG. Erit autem rursus, ut prius, d basis EG, basi BC, æqualis. Deinde quia duo latera DF, DG, æqualia sunt inter se, per constructio-
e 5. primi nem, e erunt anguli GFH, FGI, infra basin FG,
f 9. pron. æquales: Est autem angulus FGI, f major angulo FGE. Igitur & angulus GFH, eodem angulo FGE, major erit. Quare multo major erit totus angulus EFG, eodem angulo FGE. In triangu-
g 19. primi lo ergo EFG, g majus erit latus EG, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Major igitur erit quoque BC basis, basi EF. Si

igitur

igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 25. xxv.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique, basin vero basi majorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo majorem habebunt.

DUo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF; utrumque utrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem BC, major sit base EF. Dico angulum A, majorem esse angulo D. Si enim non est angulus A, major angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus circa D, utrumque utrique, per hypothesin; *a* erit & basis BC, æqualis basi EF; quod est absurdum. Ponitur enim basis BC, base EF, major: Si vero angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis EF, *b* major base BC; quod magis est absurdum, cum EF, ponatur esse minor quam BC. Quare angulus A, cum neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit major. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.

TAB. V. fig. 6.

a 4. *primi*

b 24 *primi*

THEOR. 17. PROPOS. 26. xxvi.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrumque utrique, unumque latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque

utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

TAB. V. fig. 7. SInt duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, uterque utrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi EFD; Sitque primo latus BC, quod angulis B, & C, adjacet, lateri EF, quod angulis E, & EFD, adjacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia esse, utrumque utrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus AB, non est æquale lateri DE, sit DE, majus,
c 3. primi à quo *c* abscindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturque recta GF. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus GE, EF, utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales
d 4. primi per hypothesin: *d* Erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo EFD. Quare & angulus EFG, eidem angulo EFD, æqualis erit, pars toti; Quod est absur-
e 9. pron. dum *e*. Non est igitur latus AB, inæquale lateri DE, sed æquale. Quamobrem, cum latera AB, BC, æqualia sint lateribus DE, EF, utrumque utrique, & anguli contenti B, & E, æquales;
a 4. primi *a* erunt & bases AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

TAB. V fig. 8. Sint deinde latera AB, DE, subtendentia æquales angulos C, & EFD, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, esse æqualia, utrumque utrique, hoc est, BC, ipsi EF, & CA, ipsi FD; reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, non est æquale lateri EF, sit
b 3. primi EF, majus: *b* ex quo sumatur recta EG, æqualis ipsi BC, ducaturque recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus DE, EG, utrumque utrique, & anguli contenti B, &
c 4. primi E, æquales, per hypothesin; *c* Erit angulus C, angulo

angulo EGD, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æqualis; Igitur & angulus EGD, angulo eidem EFD, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. *d* Est enim major. Non ergo est latus BC, lateri EF, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur institutum ex 4. propos. hujus libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat. d 16 *primi*

COROLLARIUM.

Sequitur ex demonstratione hujus theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia sint, ut ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos æquales B, E, *e* erunt tota quoque triangula æqualia inter se. e 4. *primi*

THEOR. 18. PROPOS. 27. xxvij.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea, alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat angulos alternatim AGH, DHG, inter se æquales. Dico lineas AB, CD, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Si namque non coirent unquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conveniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est GIH, (cum AB, recta continuata sit, item recta CD, usque ad punctum I;) & angulus AGH, positus est æqualis angulo DHG; erit externns angulus AGH, æqualis interno, & opposito DHG; quod est absurdum; *a* quoniam externus interno major est. Quod si AB, CD, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus DHG, æqualis interno & opposito, AGH, quod est absurdum. Non igitur coi- *TAB. V. fig. 9.* a 16 *primi*

coibunt lineæ AB, CD. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni BGH, CHG, æquales, demonstrabitur, lineas AB, CD, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendendum.

xxviij. THEOR. 19. PROPOS. 28.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

TAB. V. fig. 10. IN duas rectas AB, CD, recta incidens EF, faciat primo externum angulum EGA, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes GHC. Dico rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim angulo EGA, æqualis ponitur
a 15 primi angulus GHC; & eidem angulo EGA, *a* æqua-
b 1. pron. lis est angulus HGB; *b* erunt anguli alterni GHC, HGB, æquales. Quare lineæ AB, CD,
c 27. primi *c* parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus EGB, æqualis ponatur interno GHD.

Deinde faciat recta EF; angulos internos ex eadem parte, nempe AGH, CHG, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim anguli AGH, CHG, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem &
a 13. primi anguli AGE, AGH, *a* duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, duobus angulis
b 12. pron. AGE, AGH, æquales *b*. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & opposito ad easdem partes æqualis. Quare ut jam ostensum est, erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli BGH, DHG, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta

recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 29. xxix.

In parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas AB, CD, recta incidat EF. Dico primum, angulos alternos AGH, DHG, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe AGH, major. Quoniam igitur angulus AGH, major est angulo DHG, si addatur communis angulus BGH, *a* erunt duo AGH, BGH, majores duobus DHG, BGH: At duo AGH, BGH, *b* æquales sunt duobus rectis Igitur duo DHG, BGH, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem partes, B, & D, *c* coibunt lineæ AB, CD, ad eas partes, quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus AGH, major angulo DHG: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli, alterni AGH, DHG. Eademque est ratio de angulis alternis BGH, CHG.

TAB. V. fig. 10.
a 4 pron.
b 13 primi
c 13 pron.

Dico secundo, angulum externum AGE, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito CHG. Quoniam enim angulo BGH, æqualis est alternus CHG, ut ostensum est; & eidem BGH; *d* æqualis est angulus AGE. Erunt anguli AGE, CHG, *e* inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum BGE, æqualem esse angulo DHG.

d 15. primi
e 1. pron.

Dico tertio, angulos internos ad easdem partes, AGH, CHG, æquales esse duobus rectis. Quo-

Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum AGE, æqualem esse angulo CHE, interno; si addatur communis AGH, *a* erunt duo AGE, AGH, duobus CHG, AGH, æquales: Sed duo AGE, AGH, *b* æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. pron.
b 13 primi

XXX. THEOR. 21. PROPOS. 30.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ & inter se sunt parallelæ.

TAB. V. fig. 11.

SInt rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipsas AB, CD, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam in propos. 9. undecimi libri agetur de lineis in diversis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur parallela ipsi EF, *c* erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rursus quia CD, ponitur etiam parallela ipsi EF, *d* erit angulus DKI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, *e* æquales inter se quoque erunt. Cum igitur sint alterni, *f* erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.

c 29 primi
d 29 primi
e 1. pron.
f 27 primi

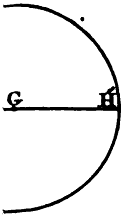
XXXI. PROBL. 10. PROPOS. 31.

A Dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

TAB. VI. fig. 1.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ BC. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, ut-

TAB. V.



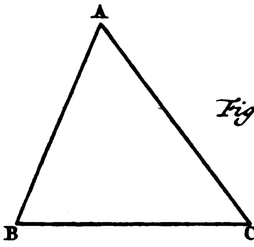
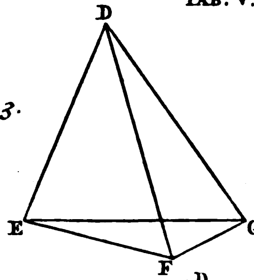


Fig. 3.





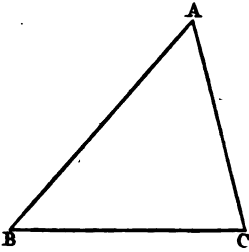
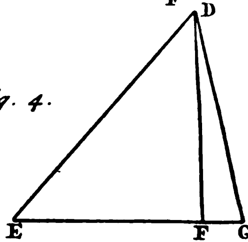


Fig. 4.



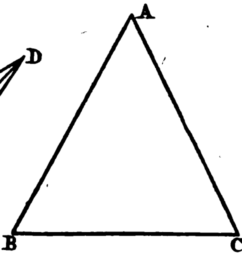
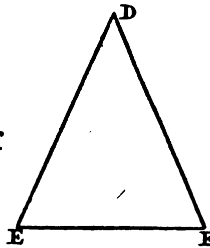
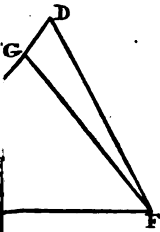


Fig. 6.





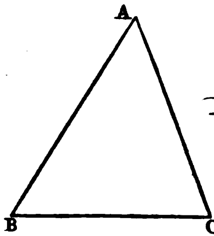
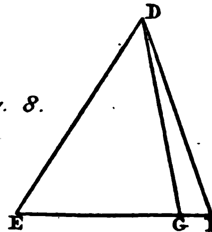


Fig. 8.



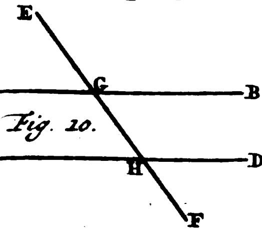


Fig. 10.

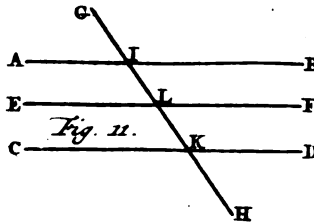


Fig. 11.

utcumque, faciens angulum quemcunque ADB; Cui ad A, *e* æqualis constituatur EAD. Dico rectam EA, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi BC. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales sint, per constructionem, *f* Erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum. e 23 primi f 27 primi

THEOR. 22. PROPOS. 32. xxxij.

Cujuscunque trianguli uno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRoducatur in triangulo ABC, latus BC, ad D. Dico primo, angulum externum ACD, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. *b* Ducatur enim ex C, linea CE, parallela rectæ AB. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, *a* erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rursus, quia recta BD, in easdem parallelas incidit, *b* erit angulus externus DCF, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus ACE, & A, itidem æqualibus ECD, & B. *c* fiet totus ACD, (qui ex duobus DCE; ACE, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum. TAB. VI. fig. 2. b 31 primi a 29 primi b 29 primi c 2. pron.

Dico secundo, tres angulos internos ejusdem trianguli A, B, & ACB, duobus esse rectis æquales. Cum enim externus angulus ACD, ut ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis ACB, *d* erunt duo anguli ACD, ACB, æquales tribus A, B, & ACB: Sed duo ACD, ACB, *e* æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, ACB, duobus sunt rectis æquales. Quare cujuscunque trianguli uno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum. d 2. pron. e 13 primi

SCHO-

SCHOLIUM.

Omnes anguli figuræ rectilineæ cujusvis, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

TAB. XV fig. 6. 7. 8. *Hoc est, anguli cujuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continentis 20 latera æquivalebunt bis 20. angulis rectis minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demonstratio autem hujus rei talis est. Si à quovis puncto A, intra figuram assumpto ad omnes angulos B, C, D, vel B, C, D, E, vel B, C, D, E, F, rectæ lineæ AD, AB, AC. vel AB, AC, AD, AE, vel AB, AC, AD, AE, AF, ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulosve figura ipsa continet.*
32. primi *Cum igitur anguli cujuscunque trianguli æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum A, intra figuram assumptum consistentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, ut constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli constituentes angulos figuræ propositæ, bis quoque tot rectis æquales, demptis illis circa punctum A, assumptum constitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sint, circa dictum punctum A, existentes æquales 4 rectis tantummodo, ut collegimus ex propos. 15. Quamobrem anguli cujusque figuræ bis tot rectis sunt æquales, ablatis quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum.*

COROLLARIUM. I.

Ex hac propos. 32. colligitur, tres angulos cujuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres,

tres, quam hi g æquales sunt duobus angulis rectis. Unde si duo anguli unius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo hujus æqualis, æquiangulaque erunt ipsa triangula. g 32 primi

COROLLARIUM. II.

Constat etiam, in omni triangulo Isoscele, cujus angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt unum rectum, h cum omnes tres sint æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare i cum duo reliqui inter se sint æquales, erit quilibet eorum semirectus. At vero si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt uno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, utrumque reliquorum majorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul majores erunt uno recto, &c. h 32 primi i 5. primi

COROLLARIUM. III.

Perspicuum quoque est, quemvis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes unius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, k quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, divisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes unius recti. k 32 primi

COROLLARIUM. IV.

Liquet etiam, si ab uno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum utrumquodque habet unum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes unius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reliquum denique tertiam partem unius recti.

THEOR.

xxxiij. THEOR. 23. PROPOS. 33.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem conjungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

TAB. VI. fig. 3. Sint rectæ lineæ AB, CD, æquales, & parallelæ; Ipsas autem conjungant ad easdem partes rectæ AD, BC. Dico AD, BC, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta AC. Quoniam igitur AC, incidit in parallelas AB, CD, *d* erunt anguli alterni BAC, DCA, æquales. (d 29 primi) Quare cum duo latera BA, AC, trianguli BAC, æqualia sint duobus lateribus CD, CA, trianguli CDA, utrumque utrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; *a* erunt bases BC, AD, æquales, & angulus ACB, angulo DAC, æqualis. (a 4. primi) Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas AD, BC, *b* erunt AD, BC, parallelæ: (b 27 primi) Probatum autem jam fuit, easdem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

xxxiv. THEOR. 24. PROPOS. 34.

Parallelogrammorum spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex adverso & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

TAB. VI. fig. 3. Sit parallelogrammum ABCD, quale definivimus definitione 35. Dico latera opposita AB, DC, inter se esse æqualia, nec non latera opposita AD, BC. Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse; nec non & angulos oppositos DAB, & DCB: Denique ducta diametro AC, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim AB, DC, sint parallelæ, *c* erunt anguli (c 29 primi)

guli alterni BAC, DCA, æquales. Rursus quia AD, BC, sunt parallelæ, *d* erunt & anguli alterni BCA, DAC, æquales. Itaque cum anguli BAC, BCA, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis DCA, DAC, trianguli ADC, uterque utrique, & latus AC, dictis angulis adjacens, commune utrique triangulo; *e* erit recta AB, æqualis oppositæ rectæ DC, & recta BC, oppositæ rectæ AD, quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia si æqualibus angulis BAC, DCA, addantur æquales anguli DAC, BCA, toti quoque anguli BAD, BCD, *a* fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sunt duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, utrumque utrique, & angulus B, angulo D, æqualis, ut jam ostendimus; *b* erunt triangula ABC, CDA, æqualia, ideoque parallelogrammum ABCD, divisum erit bifariam à diametro AC, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex adverso, &c. Quod ostendendum erat.

d 19. primi

e 26. primi

a 2. primi

b 4. primi

THEOR. 25. PROPOS. 35. XXXVI.

Parallelogramma super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

INter duas parallelas AB, CD, super basi CD, existant duo parallelogramma CDEA, CDBF. (Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, ut in exemplo proposito cernitur.) Dico ipsa parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad aream, seu capacitatem. Cadet enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelo-

TAB. VI. fig. 4.

a 34. primi grammo CDEA, recta AE, a æqualis est rectæ CD, oppositæ, & eidem CD, æqualis est FB, in parallelogrammo CDBF, opposita; Erunt
b 1. pron. AE, b FB, inter se æquales. Dempta igitur
c 3. pron. communi FE, c remanebit AF, ipsi EB, æqua-
d 34. primi lis: d Est autem & AC, ipsi ED, oppositæ æ-
e 29. primi qualis in parallelogrammo CDEA; e & angulus
f 4. primi BED, angulo FAC, externus interno. f Quare triangulum FAC; triangulo BED, æquale erit.
g 2. pron. Addito igitur communi trapezio CDEF, g fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Quod est propositum.

TAB. VI. fig. 5. Cadat secundo punctum F, in punctum E. Dico rursus, parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia esse. Erunt enim, ut prius, rectæ AE, EB, æquales, nec non & anguli BED, EAC;
h 4. primi atque adeo h triangula, EAC, BED, æqualia.
i 2. pron. Addito igitur communi triangulo CDE, i fient parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia.

TAB. VI. fig. 6. Cadat tertio punctum F, ultra E, ita ut recta CF secet rectam DE, in G. Quoniam igitur, ut prius, rectæ AE, FB, sunt æquales; si commu-
k 2. pron. nis addatur EF; k erit tota AF, toti EB, æqualis, nec non & anguli BED, FAC, æquales
l 4. primi erunt; atque adeo l triangulum FAC, triangulo BED, æquale. Ablato ergo communi triangulo
m 3. pron. EGF, m remanebit trapezium AEGC, trapezio FGDB, æquale. Quocirca addito communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

XXXVI. THEOR. 26. PROPOS. 36.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta; inter se sunt æqualia.

TAB. VI. fig. 7. Sint duo parallelogramma ACEF, GHDB, super æquales bases CE, HD, inter easdem paral-

parallelas AB, CD. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eaſdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, *o* æqualis eſt GB, in parallelogrammo GHDB, oppoſita; erunt CE, GB, *p* æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & CG, EB, ipſas conjungentes, *q* parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaque cum parallelogramma ACEF, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin CE, *r* erit parallelogrammum ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rurſus quia parallelogramma GCEB, GHDB, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin GB, *s* erit quoque parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, *t* inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.

o 34. primi
p 1. pron.
q 33. primi
r 35. primi
s 35. primi
t 1. pron.

THEOR. 27. PROPOS. 37. xxxvii.

Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

Inter parallelas AB, CD, & ſuper baſin CD, ſint conſtituta duo triangula ACD, BCD. (Dicitur autem triangulum inter duas eſſe parallelas conſtitutum, quando baſis eſt pars unius, & angulus oppoſitus alteram attingit.) Dico ea triangula eſſe æqualia. Per D, enim *i* ducatur DE, parallela rectæ AC, & DF, parallela rectæ BC. *k* Erunt igitur parallelogramma ACDE, BCDF, æqualia. Sunt enim ſuper eandem baſin, CD, & inter eaſdem parallelas. Sed horum dimidia ſunt triangula ACD, BCD; *l* quod AD, BD, diametri bifariam ſecent parallelogramma ACDE, BCDF. Igitur & triangula ACD, BCD, *m* æqualia erunt. Triangula igitur ſu-

TAB. VI. fig. 8.
i 31. primi
k 35. primi
l 34. primi
m 7. pron.

per eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

xxxviij. THEOR. 28. PROPOS. 38.

Triangula super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

TAB. VI. fig. 9. INter parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE,
x 31. primi BFD. Dico ipsa esse æqualia. *x* Ducatur enim EG, parallela ipsi AC, & DH, ipsi BF: Eruntque
y 36. primi que *y* parallelogramma ACEG, BFDH, æqualia.
z 34. primi Cum igitur horum *z* dimidia sint triangula ACE,
a 7. pron. BFD; *a* erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

xxxix. THEOR. 29. PROPOS. 39.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

TAB. VI. fig. 10. SInt duo triangula æqualia, ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam AD, parallelam esse ipsi BC.
a 31. primi Si enim non est, *a* ducatur ex A, parallela ipsi BC, quæ vel cadet supra AD, vel infra. Cadat primum supra, qualis est AE, coeatque cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam
b 37. primi igitur parallelæ sunt AE, BC, *b* erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale: Est autem per hypothesin, triangulum quoque DBC, æquale
c 1. pron. eidem triangulo ABC. Igitur *c* erunt triangula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est AF; ducta recta FC, erunt eadem

eadem ratiocinatione triangula BFC, BDC, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur AD, parallela ipsi BC. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 30. PROPOS. 40. xxxx.

Triangula æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta, & in eisdem sunt parallelis.

SInt duo triangula æqualia ABC, DEF, super bases æquales BC, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ BF. Si enim non est, cadet parallela ipsi BF, per A, ducta vel supra AD, vel infra. Cadat primum supra, coeatque cum ED, producta in G, & ducatur recta GF. Quoniam igitur parallelæ sunt AG, BF, *i* erit triangulum EFG, triangulo ABC, æquale: Ponitur autem & triangulum DEF, eidem triangulo ABC, æquale. Igitur *k* triangula DEF, GEF, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est, AH; ducta recta HF, erunt eadem argumentatione triangula HEF, DEF, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Est igitur AD, parallela ipsi BF. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

TAB. VI. fig. 11.

i 38. primi

k 1. pron.

THEOR. 31. PROPOS. 41. xlj.

Si parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

INter parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum ACDE, & *TAB. VI. fig. 12.*

 trian-

triangulum BCD. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, erunt *a* triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplum est trianguli ACD; *b* quod triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter se sint. Igitur & trianguli BCD, *c* duplum erit idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem, si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.

a 37. primi
b 34. primi
c 6. pron.

SCHOLIUM.

TAB. VI. fig. 13.

Idem hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintque in eisdem parallelis, ut cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD, FG, æquales sunt. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, g *erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE, duplum sit trianguli ACD:* h *quod diameter AD, secet parallelogrammum ACDE, bifariam:* i *erit quoque idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione si basis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc esset duplum etiam trianguli BFG, &c.*

g 38. primi
h 34. primi
i 6. pron.

xlij. PROBL. 11. PROPOS. 42.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

TAB. VI. fig. 14.

Datum triangulum sit ABC, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo ABC, habens angulum æqualem angulo D. Dividatur latus unum trianguli, nempe BC, *a* bifariam in E, & *b* fiat angulus CEF, æqualis angulo D, pro ut

a 10. primi
b 23. primi

pro ut libet, hoc est, sive angulus CEF, vergat ad partes C, sive ad partes B, pro ut magis videbitur expedire. Ducatur item per A, *c* recta AF, parallela ipsi BC, quæ secet EF, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi EF, parallela CG, occurrens rectæ AF, productæ in G, Eritque in angulo CEF, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum CEFG, quod dico esse æquale triangulo ABC. Ducta enim recta EA, quoniam parallelogrammum CEFG, *d* duplum est trianguli AEC, & triangulum ABC, duplum ejusdem trianguli AEC, *e* quod triangula AEC, ABE, super æquales bases EC, BE, & in eisdem parallelis, sint æqualia. Erunt parallelogrammum CEFG, & triangulum ABC, *f* æqualia inter se. Cum igitur angulus CEF, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

c 31 *primi*
d 41. *primi*
e 38. *primi*
f 6. *pron.*

THEOR. 32. PROPOS. 43. xliij.

In omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

IN parallelogrammo ABCD, sint circa diametrum AC, parallelogramma AEGH, CFGI, & complementa DFGH, EBIG, ut in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum *a* enim triangula ABC, CDA, æqualia sint; Itemque triangula AEG, GHA; si hæc ab illis demantur, *b* remanebunt trapezia CBEG, CDHG, æqualia: *c* Sunt autem & triangula CGI, CGF, æqualia. Quare si detrahantur ex trapeziis, *d* remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa &c. Quod ostendendum erat.

TAB VII. fig. 1.
a 34 *primi*
b 3. *pron.*
c 34. *primi*
d 3. *pron.*

xliv. PROBL. 12. PROPOS. 44.

Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

TAB. VII. fig. 2. DAta recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & unum latus æquale rectæ A. Constituatur triangulo B, *a* æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum EFG, angulo C, æqualem, producaturque GF, ad H, ut FH, sit æqualis rectæ A, & per H, *b* ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ DG, productæ in K; & *c* per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producaturque EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quæritur. Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqualem, *d* cum angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui factus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum LMFH, æquale est triangulo B, *e* cum æquale sit complemento DEFG, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

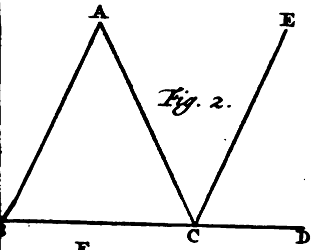
a 42. primi
b 31. primi
c 31. primi
d 15. primi
e 43. primi

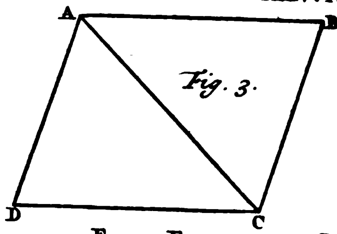
PROBL. 13. PROPOS. 45.

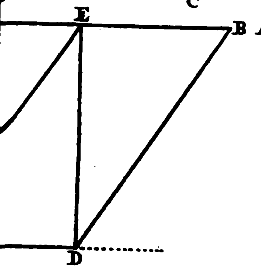
Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

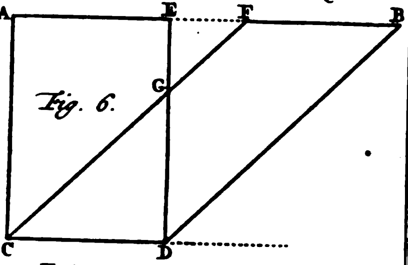
TAB. VII. fig. 3. QUamvis Euclides proponat hoc problema absolute, non adstringendo nos ad certam aliquam

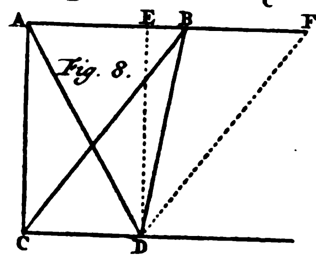
TAB. VI.

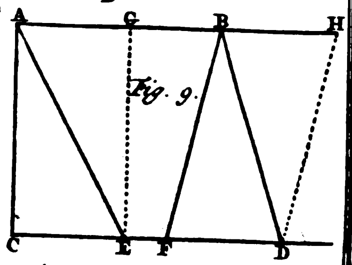

A
E
Fig. 2.
C
D

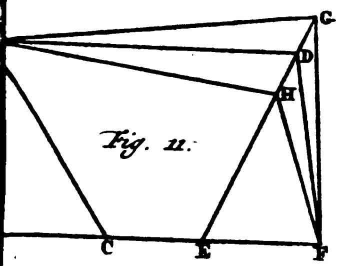

A
B
Fig. 3.
D
C

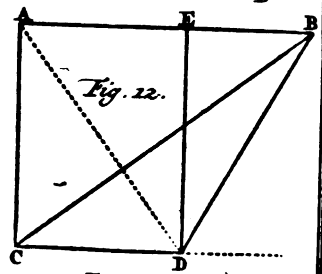

E
B
D

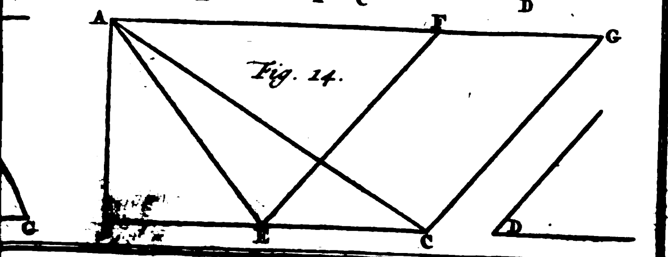

A
E
F
B
G
Fig. 6.
C
D


A
E
B
F
Fig. 8.
C
D


A
G
B
H
Fig. 9.
C
E
F
D


G
D
H
Fig. 11.
C
E
F


A
E
B
Fig. 12.
C
D


A
F
G
Fig. 14.
C
E
C
D

quam rectam lineam datam, ut in præcedenti propos. 44. fecerat; tamen quia in sequentibus frequenter usurpatur in data recta linea, placuit ipsum proponere una cum data recta linea. Sit ergo recta data EF, rectilineum ABC, & datus angulus D. Oportet igitur construere ad datam rectam EF, parallelogrammum æquale rectilineo ABC, quod habeat angulum æqualem angulo D. Resolvatur rectilineum in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, *a* æquale parallelogrammum constituatur EFGH, super rectam EF, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item super rectam GH, parallelogrammum GHIK, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam IK, parallelogrammum IKLM, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod jubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato ABC, conficiunt totum unum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli EFG, HGK, *b* inter se sunt æquales, cum uterque æqualis sit angulo D. Addito igitur communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, *c* qui duobus rectis æquivalent, *d* æquales duobus angulis HGK, FGH; ideoque hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. *e* Quare FG, GK, unam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, EH, HI, unam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli EHG, HIK, æquales inter se sunt, (*f* cum sint æquales oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.) *g* & duo anguli HIK, IHG, duobus sunt rectis æquales. &c. Cum igitur EI, FK, sint parallelæ; *h* Itemque EF, IK, quod utraque parallela sit rectæ HG; Parallelogrammum erit EFKI. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum IKLM, adjunctum parallelogrammo EFKI, constituere totum unum parallelogrammum EFLM. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectili-

a 44. primi
b 1. pron.
c 29. primi
d 2. pron.
e 14. primi
f 34. primi
g 29. primi
h 30. primi

neo ABC, constituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

SCHOLIUM.

Datis duobus rectilineis inæqualibus, excessum majoris supra minus inquirere.

TAB. VII. fig. 4. *Sint data rectilinea A, & B, sitque A, majus. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B,* i45. primi i *Fiat parallelogrammum CDEF, in quocunque angulo D, æquale majori rectilineo A. Et super rectam CD, parallelogrammum CDGH, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum CDEF, superat parallelogrammum CDGH, parallelogrammo EFHG, superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo EFHG. Quod est propositum.*

PROBL. 14. PROPOS. 46.

A Data recta linea quadratum describere.

TAB. VII. fig. 5. Sit data recta AB, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, a 11. primi *a* educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, sintque ipsi AB, æquales, & connectatur recta CD. Dico ABCD, esse quadratum. Cum enim b 28. primi anguli A, & B, sint recti, *b* erunt AD, BC, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque c 33. primi æqualis sit ipsi AB. Igitur *c* & AB, DC, parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est ABCD, in quo, cum AD, DC, CB, æquales sint ipsi AB, omnes quatuor lineæ æquales existunt; sunt autem & omnes quatuor anguli recti, d 34. primi cum C, & D, *d* æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratum igitur est ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.

THEOR.

THEOR. 33. PROPOS. 47.

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus *a* describanturque super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI, BCDE. Dico quadratum BCDE, descriptum super latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, sive hæc duo latera æqualia sint, sive inæqualia. Ducatur enim recta AK, *b* parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & jungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti, *c* erunt rectæ GA, AC, una linea recta; eodemque modo IA, AB, una recta linea erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cum sint recti, si addatur communis angulus ABC, *d* fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, utrumque utrique, ut constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, ut ostendimus; *e* Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum ABFG, *f* duplum trianguli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin BF: Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quod sint inter parallelas BE, AK, & super eandem basin BE. Quare *g* æqualia erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem ratione ostendetur

TAB. VII. fig. 6.
a 46. primi
b 31. primi
c 14. primi
d 2. pron.
e 4. primi
f 41. primi
g 6. pron.

detur, æqualia esse quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. *b* Erunt enim rursus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoque eorum dupla, parallelogrammum videlicet CDKL, & quadratum ACHI, æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL; æquale est duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratum, &c. Quod demonstrandum erat.

h 4. primi

SCHOLIUM.

Si in quadrato quovis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

TAB. VII. fig. 5.

In quadrato ABCD, ducatur diameter AC. Dico quadratum diametri AC, duplum esse quadrati ABCD. Cum enim in triangulo ABC, angulus B, rectus sit, g erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum AB, BC. Cum igitur quadrata linearum AB, BC, æqualia sint, quod linea AB, BC, sint æquales; erit quadratum diametri AC, duplum cujuslibet illorum, ut quadrati lineæ AB, hoc est, quadrati ABCD. Quod est propositum.

g 47. primi

xlvii. THEOR. 34. PROPOS. 48.

Si quadratum, quod ab uno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis; Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

TAB. VII. fig. 7.

Detur triangulum ABC, sitque quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC, esse rectum. Ducatur namque BD, perpendicularis ad

ad BA *k*, & æqualis rectæ BC, connectaturque recta AD. Quoniam igitur in triangulo ABD, angulus ABD, rectus est; *g* erit quadratum rectæ AD, æquale quadratis rectarum BA, BD: Est autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ AD, quadratis rectarum BA, BC, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC, eisdem quadratis rectarum BA, BC, æquale ponatur; *h* erunt quadrata rectarum AD, AC, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ AD, AC, æquales. Quoniam igitur latera BA, BD; trianguli ABD, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; basis AD, ostensa est æqualis basi AC; *i* erunt anguli ABD, ABC, æquales: Est autem angulus ABD, ex constructione rectus. Igitur & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab uno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

k 11. primi

g 47. primi

h 1. primi

i 8. primi





EUCLIDIS ELEMENTUM SECUNDUM.

Agit Euclides secundo hoc libro de potentiis linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium cujusvis lineæ rectæ divisæ, & parallelogramma rectangula sub partibus ejusdem lineæ divisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ &c. Quod ut commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus quæ ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maximè necessaria.

DEFINITIO I.

Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

Hac definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cujus

cujus omnes anguli sunt recti. Cujus quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, ut perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si unus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo ABCD, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cum parallela sint AD, BC, a *erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam vero* b *quilibet suo opposito est æqualis, ut angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.*

TAB. VII. fig. 8.

a 29 primi

b 34 primi

Dicit itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ unum ejus angulum rectum continent. Ut parallelogrammum rectangulum ABCD, contineri dicitur sub duabus lineis rectis AB, AD; vel sub AD, DC; vel sub DC, CB, vel denique sub AB, BC: quoniam qualibet hujusmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, una quidem ut AB, vel DC, ejus longitudinem, altera vero, ut AD, vel BC, ejus latitudinem. Unde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota ejus quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario unius lineæ in alteram hujusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta AB, deorsum secundum rectam AD, moveri in transversum, ita ut semper angulum rectum cum AD, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perveniat, descriptum erit

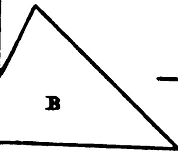
erit totum parallelogrammum ABCD. Idem fiet, si AD, ponatur moveri transversum secundum rectam, AB, &c. Quamobrem jure optimo sub talibus duabus lineis rectis continere dicitur parallelogrammum rectangulum.

Itaque parallelogrammum rectangulum; quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cujus duo latera circa unum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, utrumque utrique. Ut parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentum, erit idem, quod parallelogrammum ABCD: quoniam latus AB, æquale est rectæ E, & latus AD, rectæ F. TAB. VII. fig. 9.

Perspicuum autem est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis æqualibus esse quadratum. Cum enim qualibet illarum linearum æqualium æqualis sit linea opposita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

Item manifestum est, si duæ rectæ lineæ aliis duabus rectis lineis æquales fuerint, utraque utrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera unius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonstrari potest. Sint rectæ AB, BC, æquales rectis DE, EF, utraque utrique. Dico parallelogrammum rectangulum ABCG, contentum sub AB, BC, æquale esse parallelogrammo rectangulo DEFH, contento sub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF, cum latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, EF, trianguli DEF; & anguli B, & E, æquales, TAB. VIII. fig. 1.

TAB. VII.



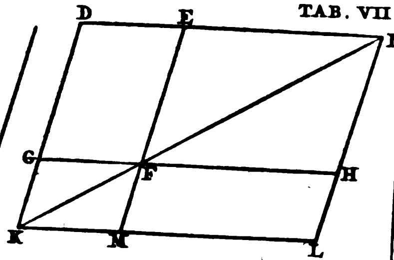
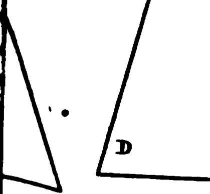
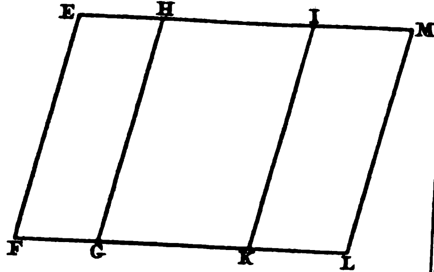


Fig. 2.

Fig. 3.





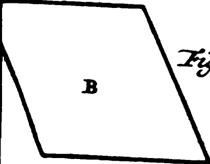
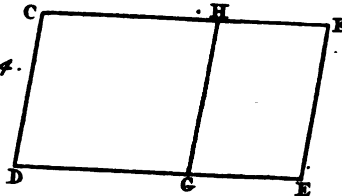


Fig. 4.



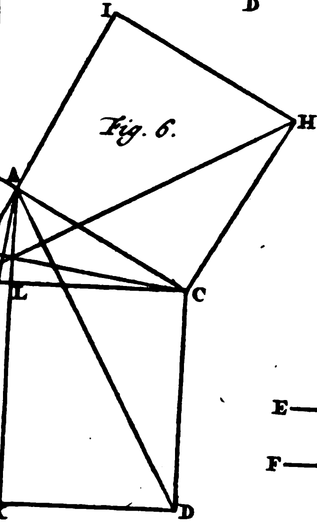


Fig. 6.

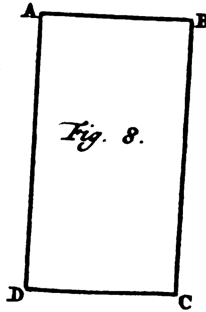


Fig. 8.

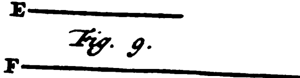


Fig. 9.

les, nempe recti; c *erunt triangula ABC, DEF, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF. Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt.* c 4. primi

Obiter quoque monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in aliis, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ observant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eædem literæ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Ut appositum parallelogrammum appellant AC, vel BG. TAB. VIII. fig. 1.

DEFINITIO. II.

In omni parallelogrammo spatio, unumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN parallelogrammo ABCD, sive rectangulum illud sit, sive non, ducatur diameter, AC, ex cujus puncto quolibet G, ducantur rectæ EF, HI, parallelæ lateribus parallelogrammi, ita ut parallelogrammum divisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo EH, IF, dicuntur esse circa diametrum, alia vero duo BG, GD, complementa, ut manifestum est ex ultima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo utrolibet circa diametrum, ut ex IF, una cum duobus complementis BG, GD, qualis est figura EBCDHGE, quam complectitur circumferentia KLM, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura FDABIGF, TAB. VIII. fig. 2, 3.

com-

composita ex parallelogrammo EH, circa diametrum, & duobus complementis BG, GD, Gnomon appellabitur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

TAB. VIII. fig. 4. Sint duæ rectæ A, & BC, quarum BC, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta BD, DE, EC. Dico rectangulum sub A, & BC, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indivisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & BD; Item sub A, & DE; Item sub A, & EC, comprehenso.

Rectangulum enim BF, comprehendatur sub A, & BC, hoc est, recta GB, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad BC, duæ perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, ducaturque recta FG. Nam rectæ BG, CF, *a* parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & *b* æquales inter se sunt, quod utraque rectæ A, æqualis ponatur. *c* Igitur erunt quoque FG, BC, parallelæ, & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit BF, contentum sub A, sive GB, & BC, ex defin. 1. hujus lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ DH, EI, parallelæ ipsi BG, vel CF. Itaque DH, EI, cum parallelæ sint ipsi BG, *d* inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eædem, cum ex constructione parallelogramma sint BH, BI, *e* æquales erunt rectæ BG, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta BG, æqualis

a 28. primi
b 1. pron.
c 33. primi
d 30. primi
e 34. primi

æqualis eſt rectæ A, erit rectangulum BH, comprehenſum ſub inſecta linea A, & ſegmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehenſum ſub A, & ſegmento DE. Item rectangulum EF, ſub A, & ſegmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia ſint toti rectangulo BF; perſpicuum eſt, rectangulum comprehenſum ſub A, & BC, æquale eſſe rectangulis omnibus, quæ ſub A, & ſegmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

Si recta linea ſecta ſit utcunque: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur: æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato.

Recta linea AB, dividatur utcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadrato totius lineæ AB. *c* Deſcribatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ *a* æqualis erit rectæ AE, hoc eſt, rectæ AB, cui æqualis eſt recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis eſt rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento CB. Quare cum rectangula AF, CD, æqualia ſint quadrato AD, perſpicuum eſt, rectangula comprehenſa ſub AB, & ſegmentis AC, CB, æqualia eſſe quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea ſecta ſit utcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.

TAB. VIII. fig. 5.

c 46. primi

a 34. primi

Aliter. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. Quoniam igitur AB, diviſa eſt in C, erit rectan- *TAB. VIII fig. 6.*

 gulum

gulum comprehensum sub insecta D, & recta
b 1. sec. AB, hoc est, quadratum rectæ AB, b æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, insecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB, quod est propositum.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si recta linea secta sit utcunque: Rectangulum sub tota, & uno segmentorum comprehensum æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

TAB. VIII. fig. 7. 8. Linea recta AB, divisa sit utcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & utrovis segmento, ut AC, (sive hoc segmentum majus sit uti in fig. 7. sive minus uti in fig. 8.) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmenti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta, rectæ AC, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Rursus, quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehensum sub segmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido constat, rectangulum sub AB, tota, & segmento AC, comprehensum esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit utcunque, &c. Quod erat ostendendum.

TAB. VIII. fig. 9. Aliter. Accipiatur recta D, æqualis segmento AC. Quoniam igitur recta AB, divisa est in C, erit

erit rectangulum comprehensum sub D, & AB, hoc est, sub AB, & AC, *a* æquale rectangulo sub D, & CB, hoc est, sub AC, CB, & rectangulo sub D, & AC, hoc est, quadrato segmenti AC. Quod est propositum. a 1. sec.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

Si recta linea secta sit utcunque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

Recta linea AB divisa sit utcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, divisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; *a* erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui *b* tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales, & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, *c* æquales sunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus est, *d* cum sit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoque æqualis angulo FEG. Quare *e* æqualia erunt latera EF, FG: quæ cum sint *f* æqualia oppositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia ejus latera sint

TAB. VIII, fig. 10.
a 5. primi
b 32. primi
c 32. primi
d 29. primi
e 6. primi
f 34. primi

ſint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quod exiſtente uno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti ſunt, ut ad defin. 1. hujus lib. demonſtravimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata ſunt ſegmentorum
g 34. primi AC, CB, quod latus HG, g æquale ſit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehenſa erunt ſub ſegmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales ſunt rectæ CB, ob quadratum CI: & FG æqualis rectæ GH, ob qua-
h 34. primi dratum FH, hoc eſt, h rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale ſit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; conſtat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale eſſe quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo ſub eiſdem ſegmentis AC, CB, bis ſumpto. Igitur ſi recta linea ſecta ſit utcunque, quadratum, quod à tota deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

TAB. VIII. fig. 11. Aliter. Quoniam recta AB, diviſa eſt in C,
i 2. ſec. i erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quæ ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem ſub AB, AC,
k 3. ſec. comprehenſum, k æquale eſt rectangulo comprehenſo ſub AC, CB, & quadrato ſegmenti AC: Item rectangulum ſub AB, CB, comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſub CB, AC, comprehenſo, & quadrato ſegmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale etiam eſt quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulis ſub AC, CB, & ſub CB, AC. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIUM. I.

Hinc manifeſtum eſt, parallelogramma circa diametrum quadrati eſſe quadrata.

COROLLARIUM. II.

Sequitur etiam ex demonſtratione hujus propoſ. 4. diametrum cujuſvis quadrati dividere ejus angulos bifariam.

riam. Probatum enim fuit angulos AEB, DEB, esse semirectos, uti angulos DEB, & DBE. *TAB. VIII fig. 10.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, una cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

DIvidatur recta AB, bifariam in C, & per inæqualia in D, ut sectionum intermedia sit recta CD, qua nimirum dimidia CB, minus segmentum DB, superat, vel qua majus segmentum AD, dimidium AC, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus AD, DB, comprehensum, una cum quadrato rectæ CD, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ CB. Describatur enim CF, quadratum super dimidia CB; & ducta diametro BE, ducatur ex D, recta DG, parallela rectæ BF, secans diametrum BE, in H, puncto, per quod ducatur rectæ BC, parallela IK: Item ex A, rectæ CE, parallela AL, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propos. DI, KG, quadrata, ideoque DH, recta rectæ DB, æqualis: *a* Est autem & KH, ipsi CD, æqualis. Quare rectangulum AH, comprehendetur sub AD, DB, & KG, erit quadratum rectæ CD; Probandum itaque est, rectangulum AH, una cum quadrato KG, æquale esse quadrato CF. Quoniam ergo *b* complementa CH, FH, æqualia sunt; si addatur commune quadratum DI, erit parallelogrammum DF, parallelogrammo CI, æquale: *c* Est autem & AK, eidem CI, æquale, quod & bases AC, CB, æquales sint. Igitur DF, AK, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur CH, erit gnomon MNO, rectangulo AH æqualis. Quocirca cum gnomon MNO, &

TAB. VIII fig. 11.
a 34. *primi*
b 43. *primi*
c 36. *primi*

& quadratum KG, æqualia ſint quadrato CF; erit & rectangulum AH, una cum quadrato KG, æquale eidem quadrato CF. Si recta ergo linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod oſtendendum erat.

ri. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adjiciatur, Rectangulum comprehenſum ſub tota cum adjecta & adjecta, una cum quadrato à dimidia, æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adjecta componitur, tanquam ab una, deſcripto.

TAB. VIII. fig. 13. SEcetur recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita AD, & DB, adjecta, una cum quadrato dimidiæ CB, æquale eſſe quadrato lineæ CD, quæ ex dimidia CB, & adjecta BD, componitur. Deſcribatur namque CE, quadratum ſuper CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, parallela rectæ DE, ſecans diametrum DF, in H, puncto, per quod agatur IK, parallela rectæ CD: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela AL, ſecans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. hujus lib. BI, KG, quadrata, ideoque recta DI, rectæ DB, æqualis: *a* Eſt autem & KH, rectæ CB, æqualis. Quare rectangulum AI, comprehendetur ſub rectis AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque eſt, rectangulum AI, una cum quadrato KG, æquale eſſe quadrato CE. Quoniam ergo parallelogrammum AK, *b* æquale eſt parallelogrammo CH, quod baſes AC, CB, æquales ſint: *c* Eſt autem & parallelogrammum HE, eidem CH, æquale, complementum complemento; erunt AK, HE, æqualia inter ſe. Addito ergo communi CI, erit rectangulum

a 34. primi *b 36. primi* *c 43. primi*

gulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, ſint æqualia; erit & rectangulum AI, una cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æquale. Itaque ſi recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adjiciatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si recta linea ſecetur utcunque; Quod à tota, quodque ab uno ſegmentorum, utraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

SEcetur recta AB, utcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum ſegmenti ſive majoris, ſive minoris AC, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub tota AB, & dicto ſegmento AC, una cum quadrato reliqui ſegmenti CB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. hujus lib. CI, HF, quadrata: & quia recta GH, a æqualis eſt rectæ AC, erit HF, quadratum ſegmenti AC. Rurſus quia AE, æqualis eſt ipſi AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehenſum erit ſub eiſdem rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales ſint rectis AB, AC, ob quadrata AD, FH. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, una cum quadrato CI, hoc eſt, gnomoni KLM, una cum quadrato CI, æquale eſt quadratum AD; ſi apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis

TAB. VIII. fig. 14. 15.

a 34. primi

AF, DH. (quorum quodlibet comprehenditur ſub tota AB, & ſegmento AC,) una cum CI, quadrato reliqui ſegmenti CB. Si igitur recta linea ſecetur utcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

viij. THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si recta linea ſecetur utcunque: Rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & uno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato, æquale eſt ei, quod à tota, & dicto ſegmento, tanquam ab una linea deſcribitur, quadrato.

TAB. VIII. fig. 16, 17. Sit recta AB, in C, diviſa utcunque. Dico rectangulum quater comprehenſum ſub AB, & ſegmento ſive majore, ſive minore CB, una cum quadrato reliqui ſegmenti AC, æquale eſſe quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto ſegmento CB, componitur. Producatur enim AB, verſus dictum ſegmentum CB, ad D, ſitque BD, recta æqualis ſegmento CB; & ſuper tota AD, quadratum deſcribatur AE. Ducta autem diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipſi DE, ſecantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipſi AD, quæ ſecent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. hujus lib. OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, *a* æqualis eſt rectæ AC, erit OI, quadratum ſegmenti AC. Rurſus *b* quia NH, æqualis eſt rectæ CB, erit NQ, quadratum ſegmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales ſint. Quare rectæ BH, HQ, æquales ſunt ſegmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehenſa erunt ſub AB, & ſegmento CB, *c* cum LH, ſit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehenſa ſub AB, & CB, cum

a 34. primi
b 34. primi
c 34. primi

cum NH, HM, rectæ *d* æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ FL, hoc est, rectæ LH, hoc est, rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM; æqualia sunt; si addatur commune KG, erunt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, una cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quamobrem, si recta linea secetur utcunque, &c. Quod demonstrandum erat. d 34. primi

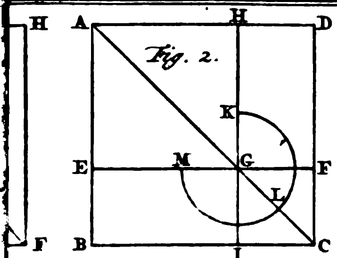
THEOR. 9. PROPOS. 9. viiij.

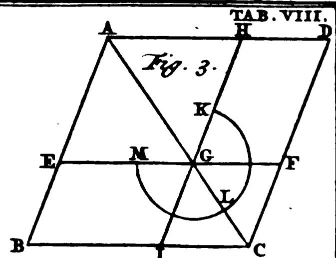
Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt, & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

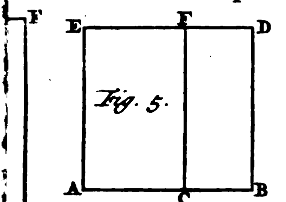
SEcetur recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico quadrata segmentorum inæqualium AD, DB, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia AC, & ex intermedia sectionum CD. Educatur enim ex C, ad AB, perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, ducanturque rectæ EA, EB. Deinde ex D, ducatur quoque ad AB, perpendicularis DF, secans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela ipsi AB, secans CE, in G, ducaturque tandem AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA, CE, æqualia sunt, *a* erunt anguli CAE, CEA, æquales: Est autem angulus ACE, rectus: Reliqui igitur *b* anguli alium rectum conficient, ideoque AEC, semirectus TAB. VIII. fig. 18. a 5. primi b 32. primi

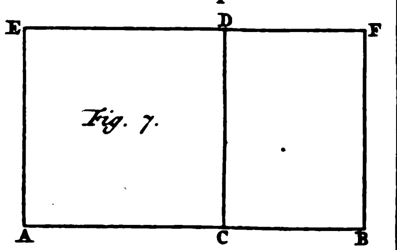
ctus erit. Eadem ratione angulus BEC, semirectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rur-
c 29. primi sus, quia trianguli FGE, angulus EGF, *c* æqua-
d 32. primi lis est recto ECB, externus interno; *d* erunt reliqui duo anguli uni recto æquales: Ostensum autem est, angulum FEG, esse semirectum. Igitur & EFG, semirectus erit, propptereaque anguli
e 6. primi EFG, FEG, æquales erunt, *e* ideoque & latera EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE,
f 47. primi angulus C, rectus sit, *f* erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quod & lineæ AC, CE, æquales sint. Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rursus, quia in triangulo EGF, an-
g 47. primi gulus G, rectus est, *g* erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum EG, GF. Igitur quadratum lateris EF, duplum erit quadrati lateris FG, hoc
h 34. primi est, quadrati lineæ CD. Est enim CD, *h* recta rectæ FG, æqualis; cum CF, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum, AC, CD: Sunt autem duo quadrata recta-
i 47. primi rum AE, EF, *i* æqualia quadrato rectæ AF; & quadratum rectæ AF, æquale duobus quadratis rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum rectæ DF, æquale est quadrato rectæ DB. Ostensum enim est rectas DF, DB, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum AC, CD, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

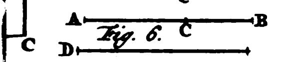
THEOR.

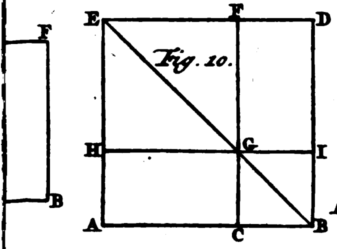

H
F
A
H
D
Fig. 2.
K
E
M
G
F
L
B
I
C

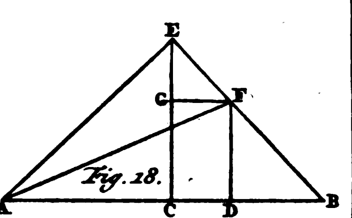

A
H
D
Fig. 3.
K
E
M
G
F
L
B
I
C

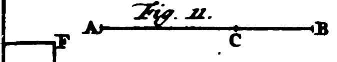

F
E
F
D
Fig. 5.
A
C
B

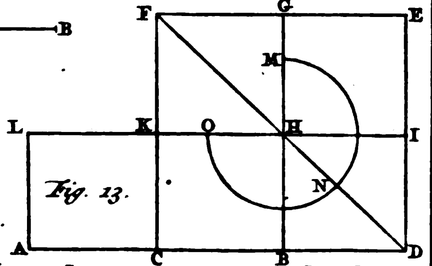

E
D
F
Fig. 7.
A
C
B

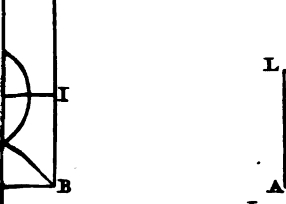

A
C
B
Fig. 6.
C
D


F
E
F
D
Fig. 10.
H
G
I
B
A
C
B

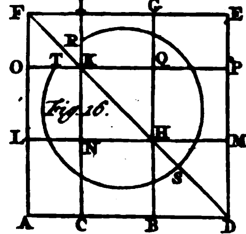

E
G
F
Fig. 18.
A
C
D
B

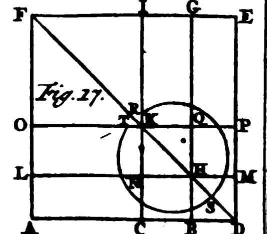

Fig. 11.
A
C
B


F
G
E
M
L
K
O
H
I
Fig. 13.
N
A
C
B
D


F
I
B

D
I
K
Fig. 15.
B


F
I
G
E
R
O
T
K
Q
P
Fig. 16.
L
N
H
M
S
A
C
B
D


F
I
G
E
Fig. 27.
R
O
T
K
Q
P
L
N
H
M
S
A
C
B
D

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adjuncta, & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt, & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod à composita ex dimidia & adjuncta, tanquam ab una, descriptum sit, quadrati.

SEcetur recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico duo quadrata rectarum AD, BD, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Super AB, enim ex C, erigatur perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, & jungantur rectæ AE, EB. Per D, deinde educatur DF, ipsi CF, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G, & per E, ducatur rectæ CD, parallela EF, secans DF, in F, jungaturque recta AG. Ostendetur jam, angulum AEB, esse rectum, ut in præcedenti propos. & CEB, semirectum; *a* ideoque ejus alternum EGF, semirectum quoque; *b* Est autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo CF, recto angulo C, opponatur. *c* Igitur & reliquus FEG, semirectus erit, & propterea ipsi EGF, æqualis. Quare *d* rectæ EF, FG, angulis FEG, EGF, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas BD, DG, esse æquales, propterea quod angulus BDG, sit rectus, & BGD, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, *e* æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum quadrati rectæ AC. Rursus quia quadratum rectæ EG, *f* quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FG, æquale est, erit quoque quadratum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc est, rectæ CD, *g* cum CD, recta æqualis sit rectæ

TAB. IX. fig. 1.

a 29. primi
b 34. primi
c 32. primi
d 6. primi
e 47. primi
f 47. primi
g 34. primi

ctæ EF. Duo igitur quadrata rectarum AE, EG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum AE, EG, æquale est *h* quadratum rectæ lineæ AG; & quadrato rectæ AG, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis AD, DG, describuntur. Quadrata ergo rectarum AD, DG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Cum igitur quadratum rectæ DG, æquale sit quadrato rectæ BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

h 47. *primi*

xi. PROBL. 1. PROPOS. 11.

Datam rectam lineam secare, ut comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

TAB. IX. fig. 2.

DAta sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum comprehensum sub tota AB, & altero ejus segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum majoris. Describatur ex AB, quadratum AC, & diviso latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bifariam in E, jungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis sumatur EF, & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Est enim AB, major, quam AF. Nam cum EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione; *a* sint autem latera AE, AB, majora latere EB; Erunt quoque rectæ EA, AB, majores recta EF: ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, major erit, quam reliqua AF. Dico rectam AB, sectam esse in G, ita ut rectangulum comprehensum sub AB, BG, æquale sit

a 20. *primi*

ſit quadrato rectæ AG; adeo ut AG, ſit majus ſegmentum, & BG, minus. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, ſecans CD, in I; Ac per F, ducatur ipſi AG, parallela FH, ſecans HI, in H. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum ſegmenti AG, cum omnia ejus quatuor latera ſint æqualia, quippe cum *b* FH, GH, æqualia ſint oppoſitis AG, AF, æqualibus; omneſque anguli ejuſdem recti ob rectum A, ut ad defin. 1. hujus libri oſtendimus. Rectangulum quoque CG, comprehenſum erit ſub AB, & ſegmento BG; quod AB, æqualis ſit ipſi BC. Itaque probandum eſt, rectangulum CG, & quadratum AH, æqualia eſſe. Quoniam igitur recta DA, diviſa eſt bifariam in E, & ei addita in rectum AF; *c* erit rectangulum ſub DF, FA, hoc eſt, rectangulum DH, (cum FH, ſit æqualis ipſi FA;) una cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc eſt, quadrato rectæ EB, quæ rectæ EF, æqualis eſt: Eſt autem quadratum rectæ EB, *d* æquale quadratis rectarum AE, AB. Quare rectangulum DH, una cum quadrato rectæ AE, æquale quoque eſt quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergo communi quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc eſt, quadrato AC. Ablato igitur rurſus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter ſe æqualia. Quod eſt propoſitum. Datam igitur rectam AB, ſecuimus, &c. Quod erat faciendum.

b 34. primi
c 6. ſec.
d 47. primi

THEOR. 11. PROPOS. 12. xij.

In amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, majus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab uno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum,

lum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TAB. IX. fig. 3. 4. TRriangulum ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, majus esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, una cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Cum enim recta CD, divisa sit in B, utcunque *a* erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: *b* Est autem quadratis rectarum CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, *c* æquale sit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.

a 4. sec.
b 47. primi
c 47. primi

xiij.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

In oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis com-

comprehenso, & ab uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

Sint omnes anguli trianguli ABC, acuti & ex A, perpendicularis AD, demissa cadat in latus BC. Dico quadratum lateris AB, quod acuto angulo ACB, opponitur, minus esse quadratis laterum AC, CB, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est, quadratum lateris AB, una cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale esse duobus quadratis laterum AC, CB. Cum enim recta BC, divisa sit in D, utcunque, erunt quadrata rectarum BC, CD, *a* æqualia rectangulo comprehenso bis sub BC, CD, & quadrato rectæ BD. Addito ergo communi quadrato rectæ DA, erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA: Duobus autem quadratis rectarum CD, DA, *b* æquale est quadratum rectæ CA. Duo igitur quadrata rectarum BC, CA, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Cum ergo duobus quadratis rectarum BD, DA, *c* æquale sit quadratum rectæ AB; erunt duo quadrata rectarum BC, CA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & quadrato rectæ AB, quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum AB, BC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, & quadrato rectæ AC, hoc est, quadratum lateris AC, minus esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. In oxygoniis ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod demonstrandum erat.

TAB. IX. fig. 5, 6, 7.

a 7. *sec.*

b 47. *primi*

c 47. *primi*

PROBL. 2. PROPOS. 14.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

TAB. IX. fig. 8, 9. Sit datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. *a* Constituatur parallelogrammum BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cujus unum latus, ut DC, producatur ad F, sitque CF, recta æqualis rectæ BC. Dividatur quoque DF, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta BC, (cum æqualis ponatur rectæ CF) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum BD, erit quadratum, cum latera DE, EB, *b* æqualia sint oppositis lateribus BC, CD; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G; non cadit in C; facto G, centro, describatur intervallo GD, vel GF, semicirculus FHD, producaturque BC, donec circumferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ CH, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta GH; quia recta DF, dividitur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub DC, CF, hoc est, rectangulum BD, una cum quadrato rectæ GC, *c* æquale quadrato rectæ GF, hoc est, quadrato rectæ GH; cum rectæ GF, GH, sint æquales: At quadratum rectæ GH, *d* æquale est quadratis rectarum GC, CH. Igitur rectangulum BD, una cum quadrato rectæ GC, æquale quoque erit quadratis rectarum GC, CH. Quamobrem dempto communi quadrato rectæ GC, remanebit rectangulum BD, hoc est, rectilineum A; quadrato rectæ CH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.

a 45. primi
fig. 8.
b 34. primi
fig. 9.
c 5. sec.
d 47. primi

EUCLI-



EUCLIDIS ELEMENTUM TERTIUM.

DEFINITIO. I.

Æquales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ ſunt æquales.

QUoniam Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonſtrat, idcirco explicat prius terminos quoſdam, quorum frequens in eo futurus eſt uſus. Primum itaque docet, eos circulos eſſe æquales, quorum diametri, vel ſemidiametri æquales ſunt. Cum enim circulus deſcribatur ex circumvolutione ſemidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, ut lib. 1. diximus, perſpicuum eſt, eos circulos eſſe æquales, quorum ſemidiametri, ſeu rectæ ex centris ductæ, ſunt æquales; vel etiam quorum totæ diametri æquales ſunt. Ut ſi diametri AB, BC, vel rectæ DF, EG, è centris D, & E, ductæ ſint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiam è contrario, ſi circuli ſint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ æquales. Ex his liquet, circu- TAB. IX. fig. 10. 11.

los, quorum diametri, vel recta ducta ex centris sunt inaequales, inaequales esse; ut si diametri BC, HI, vel recta EG, KL, è centris E, & K, ducta sint inaequales, inaequales erunt circuli BGC, & HLI; atque adeo illum, cujus diameter, vel semidiameter major, majorem. Et contra, circulorum inaequalium diametros, semidiametrosve inaequales esse, majoris quidem majorem, & minoris minorem.

TAB. IX. fig. 11. 12.

DEFINITIO. II.

Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

TAB. IX. fig. 13.

Ut recta AB, si ita circulum BFD, tangat in B, ut producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota jaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, ut producta ad G, secet circulum, cadatque intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.

DEFINITIO. III.

Circuli se se mutuo tangere dicuntur, qui sese mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

TAB IX. fig. 14 15

Eodem modo duo circuli AC, BC, se mutuo dicuntur tangere in C, si ita sese contingant in C, ut neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius se se circuli tangunt, ut quando unus extra alterum est positus; aut interius, quando unus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, ut unus alterum

fig. 15. fig. 14.

alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere. Uti circuli ED, & FD. TAB. IX. fig. 16.

DEFINITIO. IV.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam major perpendicularis cadit.

QUoniam inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Ut distantia puncti A, à recta BC, dicitur esse perpendicularis AD, non autem AE, vel AF, vel alia quævis, quæ non perpendicularis est; quia AD, omnibus est brevior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. Immo non solum AE, AF, majores sunt, quam AD, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim AF, a *major, quam AE, cum angulus AEF, sit obtusus, & AFE, acutus, & sic de aliis lineis non perpendicularibus. Quod enim AFE, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD,* b *minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cum ADF, rectus sit, angulum AFD, recto esse minorem. Eadem ratione angulus AED, ostendetur acutus. Propterea quod in triangulo ADE,* c *duo anguli ADE, AED, minores sunt duobus rectis, & ADE, rectus est, ac proinde, cum ambo AED, AEF,* d *æquales sint duobus rectis, erit AEF, obtusus. Hinc factum est, ut Euclides æ-*

TAB. X. fig. 1.

a 19. primi

b 17. primi

c 17. primi

d 13. primi

qualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Ut duæ rectæ AB, TAB. X. fig. 2. *CD, in circulo ABCD, æqualiter dicentur distare à centro E, si perpendiculares EF, EG, æquales fuerint. At linea CD, longius abesse dicetur à centro E, quam linea HI, si perpendicularis EG, major fuerit perpendiculari EK.*

DEFINITIO. V.

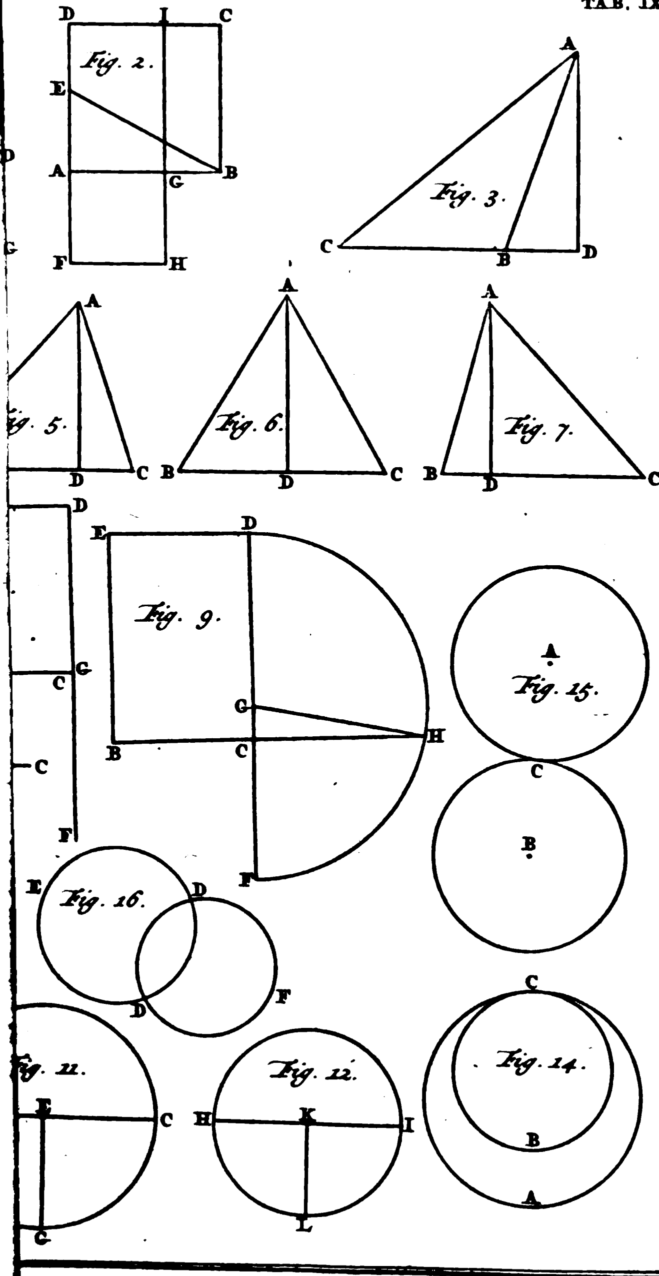
Segmentum circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

TAB. X. fig. 3. *UT si ducatur in circulo ABCD, recta BD, utcunque, dicetur tam figura BAD, contenta circumferentia BAD, & recta BD; quam figura BCD, comprehensa recta BD, & circumferentia BCD, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum. Semicirculus, quando recta BD, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo majus, quando recta BD, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum BAD; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cujusmodi est segmentum BCD. Vocatur à plerisque Geometris recta BD, chorda, & circumferentia BAD, vel BCD, arcus.*

DEFINITIO. VI.

Segmenti autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

DEfinit jam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmen-


TAB. IX.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14.

segmenti, dicens angulum mixtum ABD, vel ADB, contentum sub recta linea BD, & circumferentia BAD, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus BAC, semicirculi: Si vero segmentum majus semicirculo extiterit, vocabitur angulus ABD, segmenti majoris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus CBD, segmenti minoris nuncupabitur. TAB. X. fig. 3. fig. 4. fig. 3.

DEFINITIO. VII.

In segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ ejus lineæ, quæ segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adjunctis illis lineis comprehensus angulus est in segmento.

Sit segmentum circuli quodcunque ABC, cujus basis recta AC. Ex suscepto quolibet puncto, B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, recta linea BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur existere in segmento ABC. TAB. X. fig. 5.

DEFINITIO. VIII.

Cum vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

Ex puncto A, quolibet suscepto in circumferentia circuli ABCD, ducantur recta dua linea AB, AD, ad duo extrema B, & D, circumferentia BCD, cujusque, quam quidem dua recta AB, TAB. X. fig. 6.

 AD,

AD, assumunt. Angulus itaque rectilineus BAD, insistere dicitur circumferentiæ BCD.

Præter tres dictos angulos consideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur lineæ recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certe duobus circumferentiis se mutuo tangentibus, sive hoc exterius fiat, sive interius. Exemplum.
TAB. X. fig. 7. *Si recta AB, tangat circulum CDE, in C; angulus mixtus ACD, vel BCE, dicetur angulus contingentiæ, sive contactus: Rursus, si circulus CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HFI, circulum EFG, interius in F; appellabitur tam angulus curvilineus CEF, quam EFH, vel GFI, angulus contactus, seu contingentiæ. Sunt itaque, ut vides, tres anguli contingentiæ, unus quidem mixtus, reliqui vero duo curvilinei.*

DEFINITIO IX.

Sector autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

TAB. X. fig. 8. *SI in circulo ABCD, cujus centrum E, rectæ AE, CE, constituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli.*

DEFINITIO X.

Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

TAB. X. fig. 9. *SEgmenta videlicet ABDF, DCAE, ejusdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF,*

ABF, DCE, æquales: vel, quod idem est, in quibus iidem anguli æquales existunt, juxta 7. definitionem, similia dicuntur, & ipsæ circumferentiæ quoque ABDF, DCAE, similes.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

Dati circuli centrum reperire.

SIt circulus datus ABCD, cujus centrum oportet invenire. Ducatur in eo linea utcunque AC, *a* quæ bifariam dividatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, utrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam dividat inæqualiter, quandoquidem in F, divisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & basis AG, basi CG; (à centro enim duci dicuntur) *b* erunt anguli AEG, CEG, æquales; *c* ideoque recti: Erat autem & angulus AEF, rectus, ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum, quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademque est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

TAB. X. fig. 10.
a 10. *primi*
b 8. *primi*
c 10. *def.*

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod BD, recta, rectam AC, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum ejus medium F, necessario esse circuli centrum.

THEOR.

ij. THEOR. 1. PROPOS. 2.

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adjungitur, intra circulum cadet.

TAB. X. fig. 11. IN circulo ABC, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in ejus circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam, cadere intra circulum, ita ut ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, ut vult adversarius. Invento *a* igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, nec non ad quodvis punctum D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED, secetque ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cujus basis ponitur recta ADC, æqualia sunt, (è centro enim ducuntur) *b* erunt anguli EAD, ECD, æquales: Est autem angugulus EDA, *c* angulo ECD, major externus interno opposito, cum latus CD, in triangulo ECD, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, major erit idem angulus EDA. Quare recta EA, majori angulo ADE, opposita, (hoc est, recta EB, sibi æqualis;) *d* major erit, quam recta ED, minori angulo DAE, opposita, pars quam totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum ABC, ita ut eadem sit, quæ circumferentia ABC. Esset enim recta EA, major, quam recta EB. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum ABC, arcus sit linea curva, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. tertii.
b 5. primi
c 16. primi
d 19. primi

CO-

COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita ut eum non secet, in uno tantum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, g caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin. g 2. tertii.

THEOR. 2. PROPOS. 3. iij.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PEr centrum A, circuli BCD, recta CE, extensa dividat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales. a Igitur anguli AFB, AFD, æquales erunt, hoc est, d recti. Quod erat primo propositum. TAB. X. fig. 12. a 8. primi d 10. def.

Sit jam AF ad angulos rectos ipsi BD. Dico rectam BD, bifariam secari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, b erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF; & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: c erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat. b 5. primi c 26. primi

CO-

COROLLARIUM.

Ex hac demonſtratione facile inferemus, in quovis triangulo duorum laterum æqualium, ſive æquilaterum illud ſit, ſive Iſoſceles, lineam, quæ baſim bifariam ſecet, perpendicularem eſſe ad baſim. Et contra, lineam, quæ ad baſim ſit perpendicularis, baſim ſecare bifariam.

TAB. X. fig. 12. Nam in triangulo ABD, cujus duo latera AB, AD, æqualia ſunt, atque adeo ex centro A, per B, D, circulus deſcribi poteſt: ex eo, quod recta AF, ſecat baſin BD, bifariam, oſtenſum eſt, angulos ad F, eſſe rectos: Et ex eo, quod anguli ad F, recti ſunt, demonſtratum eſt, baſim BD, à recta AF, bifariam ſecari.

iv. THEOR. 3. PROPOS. 4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, non per centrum extenſæ; ſe ſe mutuo bifariam non ſecabunt.

TAB. X. fig. 13. DUæ rectæ AB, CD, ſe mutuo in E, ſecent in circulo ACBD, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, ut mutuo ſeſe bifariam ſecent. Si enim una earum per centrum tranſit, certum, eſt, eam bifariam non ſecari: ſolum enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam dividitur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamvis una earum nonnunquam bifariam ab altera dividatur, tamen altera minime ſecabitur bifariam. Diviſa enim ſit & AB, & CD, ſi fieri poteſt, bifariam in E.
a 1. tertii. *a* Invento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta EF. Quoniam ergo FE, ponitur
b 3. tertii. ſecare rectam AB, bifariam in E, *b* ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur CD, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam dividi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 5. v.

Si duo circuli ſeſe mutuo ſecent, non erit illorum idem centrum.

DUo circuli ABD, EBD, ſe mutuo ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idem centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum utriuſque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB, quidem ad ſectionem B; CA, vero ſecans utramque circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta EC, rectæ CB, *b* æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta AC, eidem rectæ BC, æqualis. Quare rectæ EC, AC, *a* æquales inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.

TAB. X. fig. 14.

b 15. def.

a 1. pron.

THEOR. 5. PROPOS. 6. vi.

Si duo circuli ſeſe mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DUo circuli AB, BC, ſe interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur; DB, quidem ad tactum B. At DC, ſecans utramque circumferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, *b* æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æqualis. Quare rectæ AD, & CD, *a* inter ſe erunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſe ſe mutuo interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat.

TAB. X. fig. 15.

b 15. def.

a 1. pron.

THEOR.

vij. THEOR. 6. PROPOS. 7.

Si in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper major eſt: Duæ autem ſolum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utraſque partes minimæ, vel maximæ.

Tab. X. fig. 16. IN diametro AB, circuli ACDEB, cujus centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam eſſe GA, in qua eſt centrum, minimam vero reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior eſt, majorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus diſtat; & eadem ratione GD, majorem recta GE, atque ita de aliis lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad utraſque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci poſſe tantummodo duas lineas inter ſe æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, *a* majora ſunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc eſt, toti rectæ GA; erit & GA, major, quam GC. Eadem ratione major erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima eſt omnium, que ex G, in circulum cadunt.

a 20. primi

Deinde, quoniam in triangulo EFG, latus EF, *b* minus eſt duobus lateribus FG, GE. Eſt autem EF,

b 20. primi

EF, ipsi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

Rursus, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, major est angulo GFD; c erit basis GC, major base GD. Eadem ratione major erit GC, quam GE; Item major erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major est ea, quæ remotior. c 24. primi

Fiat jam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia sunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; d erunt rectæ GE, GH, ex utraque parte ipsius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, major quam GH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, ut ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad utrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum. d 4. primi

THEOR. 7. PROPOS. 8. viij.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ vero ut libet:

libet: In cavam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper major est; In convexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ, vel maximæ.

TAB. X. fig. 17. EX puncto A, extra circulum BCDEFI, cujus centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum AI, per centrum transeat, aliæ vero AH, AG, AF, utcunque. Dico omnium esse maximam AI, quæ per centrum incedit: Deinde rectam AH, quæ rectæ AI, quæ per centrum ducitur, propinquior existit, majorem recta AG, quæ remotior est ab eadem AI: Et eadem ratione AG, majorem quam AF. E contrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse: Deinde rectam AC, quæ vicinior est minimæ AB, minorem esse recta AD, remotiore; Et eadem ratione, ipsam AD, minorem quam AE. Denique ex A, ad utrasque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ AI, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera AK, KH, trianguli AKH, *a* majora sunt recta AH; Sunt autem rectæ AK, KH, æquales rectis AK, KI, hoc est, toti rectæ AI; erit & AI, major, quam AH. Eadem ratione erit AI, major, quam AG, & quam AF. Quare AI, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima. Deinde,

a 20 primi

Deinde, quoniam latera AK, KH, trianguli AKH, æqualia sunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus AKH, major est angulo AKG; *b* erit basis AH, base AG, major. Eadem ratione major erit AH, quam AF: Item AG, major, quam AF. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major est linea remotiore. b 24. primi

Rursus, quia in triangulo ACK, recta AK, *c* minor est duabus AC, CK; si auferantur æquales BK, CK: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit AB, minor, quam AD, & quam AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est. c 20. primi

Rursus, cum intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK; *d* erunt AC, CK, minores, quam AD, DK. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam AD. Pari ratione erit AC, minor, quam AE, item AD, minor quam AE. Quare linea propinquior minimæ lineæ AB, minor est, quam remotior ab eadem. d 21. primi

Postremo fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC, trianguli AKC, æqualia sunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; *e* erunt rectæ AC, AL, ex utraque parte minimæ AB, vel maximæ AI, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens ultra L, erit ipsa, cum sit remotior à minima major quam AL. Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam AL, ut ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad utrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum. e 4. primi

THEOR. 8. PROPOS. 9.

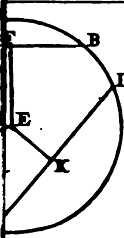
Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

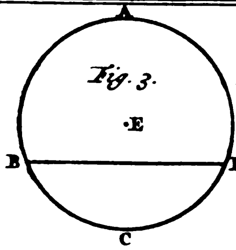
TAB. X. fig. 18. A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC, AD, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD; quibus divisis bifariam in E, & F, *b* ducantur ex A, rectæ AE, AF. *b 10. primi* Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & bases AB, AC, ponuntur etiam æquales; *a* erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque *a 8. primi* recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ AE, AF, dividant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. hujus lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

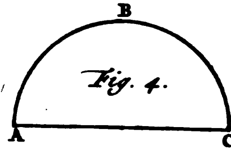
TAB. XI. fig 1. Aliter. Si punctum A, non est centrum circuli, *b* sit centrum inventum E, ex quo per *b 1. tertii.* A, agatur diameter FG. Quoniam igitur in diametro FG, præter centrum acceptum est punctum A, à quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; *c* erit recta AD, quæ propinquior est *c 7. tertii.* rectæ AG, per centrum E, ductæ major, quam recta AC, remotior ab AG, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ AD, AC. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter, A, centrum ponatur.

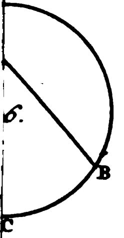
Quod si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum una trium æqualium

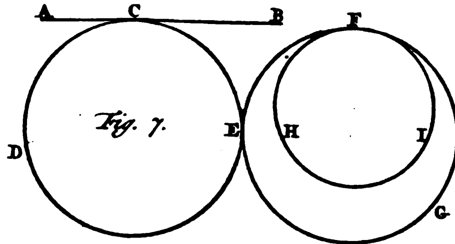
TAB. X.

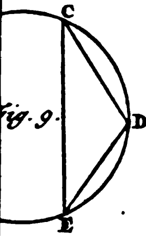

F
B
I
E
K

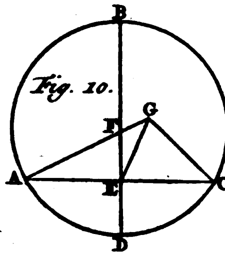

A
Fig. 3.
E
B
D
C

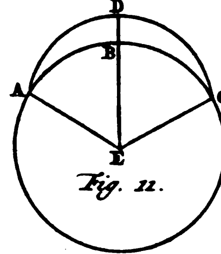

B
Fig. 4.
A
C

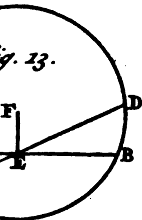

6.
B
C

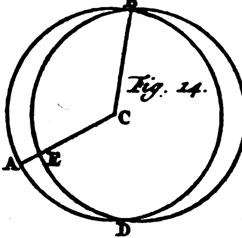

A
C
B
Fig. 7.
D
E
F
H
I
G

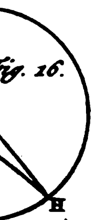

C
Fig. 9.
D
E

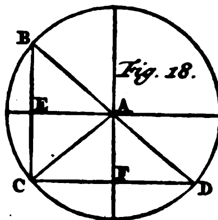

B
Fig. 10.
G
F
A
E
C
D

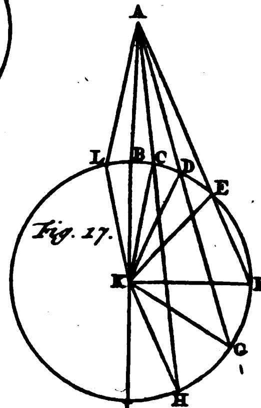

D
B
A
C
E
Fig. 11.


Fig. 13.
D
F
E
B


B
Fig. 14.
C
A
E
D


Fig. 16.
H


B
Fig. 18.
E
A
C
F
D


A
L
B
C
D
E
Fig. 17.
K
F
G
H

lium datarum, ut si dicantur æquales tres AB, AF, AC, ubi EA, coincidit cum AF; *d* erit AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quam AB, & AC, quod est absurdum. Ponitur enim utrique æqualis. d 7. tertii.

THEOR. 9. PROPOS. 10.

Circulus circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

SEcet enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulum AGBDHE, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ jungantur rectis AB, BD: quibus *a* bifariam divisis in I, & K, *b* educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraque, ex corollario propos. 1. hujus lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se dividunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum, *c* quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

TAB. XI. fig. 2.
a 10. primi
b 11. primi
c 5. tertii.

Aliter. Secent se iidem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. *d* Inventum autem sit I, centrum circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ rectæ æquales, *e* erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. *f* Quod est absurdum.

TAB. XI. fig. 3.
d 1. tertii.
e 9. tertii.
f 5. tertii.

THEOR. 10. PROPOS. 11.

Si duo circuli ſe ſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adjuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TAB. XI. fig. 4. Tangat circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & ſit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod neceſſario ab illo diverſum erit, cum duo circuli interius ſe tangentes, *a* non poſſint idem centrum habere. Dico rectam extenſam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit ſecet utrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, *b* majora ſunt latere GA; Eſt autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, poſitum ſit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ majores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, major, quam FD. Quare cum FA, æqualis ſit ipſi FB; (quod F, poſitum fuerit centrum circuli ABC,) erit & FB, major, quam FD, pars quam totum, quod eſt abſurdum.

a 6. tertii.

b 20. primi

Quod ſi quis velit contendere, F, eſſe centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, inſtituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, *c* majora ſunt latere FA: Eſt autem recta FA, rectæ FE, æqualis, (cum F, ponatur centrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, majores ſunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, major, quam GE. Quia igitur GA, æqualis eſt ipſi GC: (propterea quod G, ponitur eſſe centrum circuli ABC,) erit quoque GC, major, quam GE, pars quam totum, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum ſequetur, ſi centrum majoris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta FG,

c 20. primi

FG, extensa utrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli sese intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 12. xii.

Si duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adjungitur, per contactum transibit.

Circuli duo ABC, DBE, tangant se exterius in B, & centrum circuli ABC, sit F, circuli vero DBE, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, *a* majora sunt latere FG: Est autem recta BF, rectæ FC, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli ABC,) & recta GB, rectæ GE, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE,) erunt & rectæ FC, GE, majores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, contineat præter FC, GE, rectam adhuc CE,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

TAB. XI. fig. 5.

a 20. primi

THEOR. 12. PROPOS. 13. xiii.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, sive intus, sive extra tangat.

Tangant sese circuli ABCD, AECF, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam uno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, *a* quæ diversa erunt, per quæ recta GH, in utramque partem extendatur, quam

TAB. XI. fig. 6.

a 6. tertii.

 necesse

b 11. tertii. neçesse est *b* cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta AGHC, diameter, dividetur AGHC, bifariam in puncto G. Simili ratione dividetur eadem AC, bifariam in H, quod est absurdum. Una enim recta in uno duntaxat puncto dividitur bifariam. Si namque GC, est dimidium totius AC, erit necessario HC, dimidio minor, cum sit pars dimidii GC.

TAB XI. fig. 7. Quod si quis dicat rectam GH, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At vero ad partes H, minime pertingere ad contactum C, sed secare utrumque circulum in I, & K, ut in 7ma figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propos. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in unum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo recte affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. utrique contactui conveniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus, absurdum illud esse:) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ GC, HC. Ponatur igitur primo G, centrum circuli ABCD: & H, centrum circuli AECF. Et quia in triangulo GHC,

c 20. primi duo latera GH, HC, *c* majora sunt latere GC: Sunt autem rectæ GH, HC, æquales ipsi GK: (quod HC, HK, ex centro H, sint æquales, & GH, communis) & recta GC, rectæ GI; (quod sint ex G, centro,) erit quoque recta GK, major quam GI, pars quam totum, quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoni-

d 20. primi am igitur rectæ HG, GC, *d* majores sunt recta HC; Est autem HC, æqualis rectæ HA: (cum utraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque HG, GC, majores recta HA. Quare dempta communi HG, erit GC, major, quam GA, quod est absurdum; cum utraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam uno.

TAB. XI. fig. 8. Tangant se jam circuli AB, CB, exterius in pluribus

pluribus punctis, quam uno prope F. Ducatur ex D, centro circuli AB, ad E, centrum circuli CB, recta DE, *e* quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis DB, EB, erunt rectæ DB, EB, æquales rectis DF, EF, hoc est ipsi DE: *f* Sunt autem & majores, quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam uno.

e 12. tertii
f 20. primi

Aliter. Si circuli AB, CB, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta BF, cadet ipsa intra unum circulorum, per 2. propos. hujus tertii lib. & ideo extra alium, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 13. PROPOS. 14. xiv.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

SInt in circulo ABCD, cujus centrum E, duæ rectæ æquales AB, CD. Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas AB, CD, duæ perpendiculares EF, EG, & conjungantur rectæ EA, ED. *a* Secabunt rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ EA, *b* æquale est quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, quadratis rectarum DG, GE: Erunt quoque quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoque & rectæ EF, EG, æquales erunt. Distant igitur

TAB. XI. fig. 9.
a 3. tertii.
b 47. primi

per 4. defin. hujus lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.

Rursus distent rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. hujus
c 3. tertii. lib. æquales erunt; c dividentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum
d 47. primi rectæ EA, d æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia sunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro &c. Quod erat demonstrandum.

15. THEOR. 14. PROPOS. 15.

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper major.

TAB. XI. fig. 10. IN circulo ABCDEF, cujus centrum G, diameter sit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF, & HI, majorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à centro, quam HI, erit GK, major quam GL, per 4. defin. hujus lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4.
a 14. tertii. defin. hujus lib. a & ideo inter se æquales erunt.
b 20. primi Rursus quia rectæ GB, GE, b majores quidem sunt

ſunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, major, quam BE. Eadem ratione oſtendetur AF, major omnibus aliis lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia ſunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, major eſt angulo CGD; *c* erit recta BE, major quam CD; atque adeo HI, quæ æqualis oſtenſa fuit ipſi BE, major quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat demonſtrandum. c 24. *primi*

THEOR. 15. PROPOS. 16. xvi.

Quæ ab extremitate diametri cujuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet: & ſemicirculi quidem angulus, quovis angulo acuto rectilineo major eſt; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cujus centrum D, diameter ſit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem neceſſario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipſum, qualis eſt AB; ducta DB, *a* erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, ſed DAB, rectus eſt, per conſtructionem: Igitur & DBA, rectus erit, quod eſt abſurdum. Duo enim anguli in triangulo *b* minores ſunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum: neque eandem ob cauſam in ipſam circumferentiam, ſed extra, qualis eſt EF. Dico jam ex A, inter AE, rectam, & circumferentiam AB, non poſſe cadere alteram rectam. Cadat enim, ſi fieri poteſt, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, ſecans circumferentiam in I, quæ neceſſario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1.

TAB. XI. fig. 11.

a 5. *primi*

b 17. *primi*

 Quo-

c 17. primi Quoniam igitur in triangulo DAH, c duo anguli DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus est, per constructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoque recta DA, hoc
d 19. primi est, recta illi æqualis DI, d major erit, quam DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, majorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cum AC, angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at vero cum AE, angulum rectilineum acutum majorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quodpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea AB, intra circulum cadat, ut demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo semicirculi contento sub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille hujus sit pars: Angulus vero contingentiæ contentus sub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quod ille hujus pars sit. Eademque ratio est de omnibus aliis angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, sub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, ut demonstravimus. Angulus igitur semicirculi major est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cujusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

CO-

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipsum circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

Quare si jubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circulum tanget in A, ut demonstratum est. TAB. XI. fig. 14.

PROBL. 2. PROPOS. 17. xvii.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

EX puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum BC, cujus centrum D. Ducatur recta AD, secans circulum BC, in B. Deinde centro D, intervallo autem DA, describatur circulus AE, & ex B, educatur BE, perpendicularis ad AD, secans circulum AE, in E. Ducta denique recta ED, secante circulum BC, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, utrumque utrique, ut constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus sit communis: Erunt a & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C, quod faciendum erat. TAB XI. fig. 13. a 4. primi

THEOR.

xviij. THEOR. 16. PROPOS. 18.

Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adjungatur recta quædem linea; quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

TAB. XI. fig. 14. Recta linea AB, tangat in C, circulum CD, cujus centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, *a* duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare *b* major erit recta EC, hoc est, ED, quam EF, pars quam totum, quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

a 17. primi
b 19. primi

Aliter. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum major sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi *c* major est omni acuto.

c 16. tertii.

xviiij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TAB. XI. fig. 15. Tangat recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra

extra CE, sit F, centrum; à quo ad C, ducatur recta FC, quæ *a* perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum. a 18. *tertii*.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cujus centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum esse anguli BAC. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, *a* erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulus BDE, *b* æqualis duobus angulis internis DAB, DBA: Quare BDE, duplus erit alterius eorum, ut anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum. *TAB. XI. fig. 16.* a 5. *primi* b 32. *primi*

Deinde non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC. *c* æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo *d* inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum. *TAB. XI. fig. 17.* c 32. *primi* d 5. *primi*

Tertio recta AB, secet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur *TAB. XII. fig. 1.*

igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem basin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, ut ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem basin EB. Reliquus igitur angulus BDC,
e 10. pron. duplus erit reliqui anguli BAC *e*. Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.

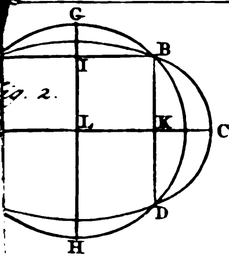
xxi. THEOR. 19. PROPOS. 21.

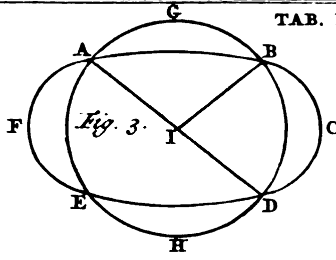
In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt inter se æquales.

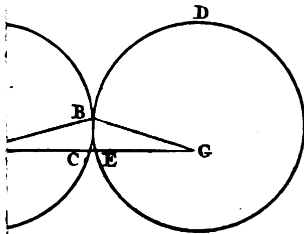
TAB. XII. fig. 2. IN circulo ABCD, cujus centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo majus; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, *a* duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basin DC; erunt anguli
a 20. tertii.
b 7. pron. A, & B, dimidiatæ partes anguli E. *b* Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alii anguli existentes in segmento DABC, ostendentur esse æquales.

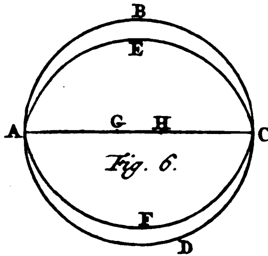
TAB. XII. fig. 3, 4 Sit deinde segmentum DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in segmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur
c 20. tertii. angulus DEF, ad centrum, *c* duplus est anguli DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli simul DEF, CEF, duorum angulorum simul DAF, CAF, dupli erunt, hoc est, totius anguli DAC: Sunt autem anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF:

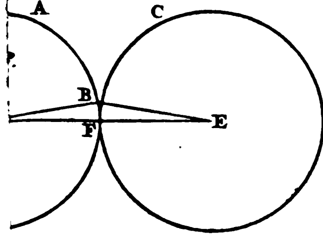
TAB. XI.

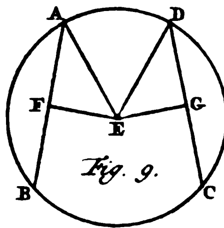

G
B
I
Fig. 2.
L
K
C
D
H

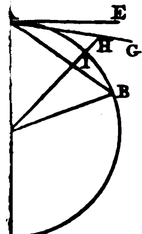

G
A
B
F
Fig. 3.
I
C
E
D
H

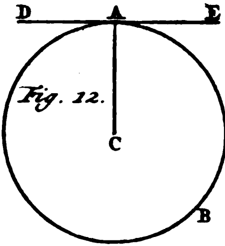

D
B
C
E
G

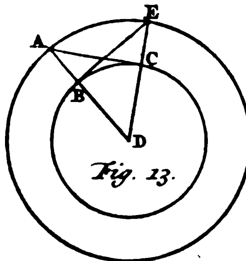

B
E
A
G
H
C
Fig. 6.
F
D

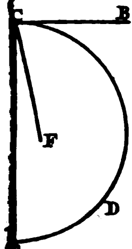

A
C
B
F
E

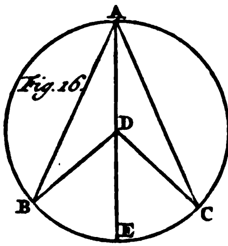

A
D
F
E
G
Fig. 9.
B
C

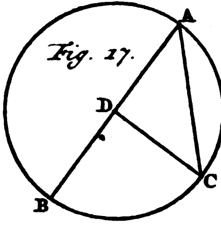

E
H
G
I
B


D
A
E
Fig. 12.
C
B


E
A
C
B
D
Fig. 13.


B
F
D


A
Fig. 16.
D
B
C
E


A
Fig. 17.
D
C
B

DEF: erunt quoque tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt iidem tres anguli dupli anguli DBC. *d* Quare æquales erunt anguli DAC, DBC. d 7. prim.

Aliter. Secent sese rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam hi *f* æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, *g* qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmento majori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt. TAB. XII. fig. 5, 6. f 32. primi g 15. primi

Aliter. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quodvis F, includentibus centrum E, ita ut tam DABCF, quam FDABC, sit segmentum majus; jungantur quoque rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento majori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam majori FDABC, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum. TAB. XII. fig. 7, 8.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxii.

Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex adverso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cujus centrum E, inscriptum sit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, *a* erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, TAB. XII. fig. 9, 10. a 21. tertii

ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD,
b 32. primi CAD, CDA. *b* Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus duo anguli ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD,
c 32. primi æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. *c* Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterornm igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

Anguli insistentes arcubus circulorum similibus sive ad centra, sive ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales sive ad centra, sive ad circumferentias insistunt, similes sunt.

TAB. XII. fig. 11. *Sint in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium,*
k 22. tertii *æquales erunt.* k *Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui*
l 20. tertii *A, E, æquales. Quorum* l *cum dupli sunt anguli I,*
m 6. pron. *K,* m *erunt hi quoque æquales. Quod est propositum.*
Deinde sint tam anguli I, K, quam A, E, insistentes arcubus BCD, FGH, inter se æquales. Dico arcus BCD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, sint

sint æquales: b sint autem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si vero anguli I, K, ad centra sint æquales, c erunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc est, anguli A, E. Quare ut prius, arcus BCD, FGH, similes sunt. Quod erat ostendendum. b 22. tertii. c 7. pron.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiij.

Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod se solum intersecent in punctis A, & B; a Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Unde peripheria unius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. hujus lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: b quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum. *TAB. XII. fig. 12.* a 10. tertii. b 16. primi.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxiv.

Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

SUper rectis lineis æqualibus AB, CD, constituta sint segmenta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, *TAB. XII. fig. 13.*

cum ſint æquales, congruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmentum AEB, ſegmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod ſi extra cadat, aut intra, conſtituentur ſuper eadem recta CD, duo ſegmenta AEB, AFB, ſimilia, & inæqualia, quorum unum totum extra aliud cadit, quod eſt
a 23. tertii. abſurdum. *a* Demonſtratum enim eſt contrarium. Quod ſi partim extra cadat, partim intra, ſecabunt ſeſe in pluribus punctis, quam duobus nimirum in A, B, G. Quod eſt abſurdum.
b 10. tertii. *b* Circuli enim non ſe ſecant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur ſegmentum AEB, ſegmento CFD, atque adeo ipſa inter ſe æqualia erunt. Quocirca ſuper æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

XXV. PROBL. 3. PROPOS. 25.

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cujus eſt ſegmentum.

TAB. XII. fig. 14. Sit ſegmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam ſecetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel major eſt angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum major, (quod quidem continget, quando ſegmentum ABC, minus fuerit ſemicirculo: Tunc enim, quia BD, tranſit per centrum, ex corollario propoſ. 1. hujus lib. quod eſt extra ſegmentum, cum ponatur eſſe minus; erit DA, major, quam DB, cum
a 7. tertii. DB, perficiens diametrum *a* ſit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt.
a 18. primi Quare angulus DBA, *b* major erit angulo DAB) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & ſecet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, eſſe centrum circuli, cujus ſegmentum ABC.

ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. *c* Quare bases EA, EC, æquales erunt; *d* Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt, *e* ac propterea E, centrum erit circuli ABC, quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

c 4. *primi*
d 6. *primi*
e 9. *tertii.*

Sit deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare *f* & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) *g* Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quod recta AC, secta sit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiam, *h* erit D, centrum.

TAB. XII. fig. 15.
f 5. *primi*
g 6. *primi*
h 9. *tertii.*

Sit tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, (quod quidem eveniet, si segmentum ABC, semicirculo majus exstiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. hujus lib. quod quidem intra segmentum, cum majus esse ponatur, existit; *i* erit DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; major igitur erit quam DA, *k* ideoque angulus DAB, major angulo DBA,) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, in E, puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus DBA, major erat angulo DAB, ut constat, si recta ducatur EC. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cujus est segmentum. Quod facere oportebat.

TAB. XII. fig. 16.
i 7. *tertii.*
k 18. *primi*

xxvi. THEOR. 23. PROPOS. 26.

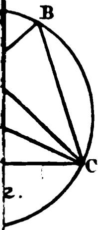
In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad peripherias conſtituti inſiſtant.

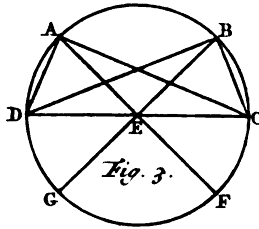
TAB. XII. fig. 17. IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, conſtituti ſint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus inſiſtunt, ſive ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Sumantur enim in peripheriis ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturque rectæ AC, DF. Quoniam igitur a20. tertii. *a* anguli B, & E, dimidii ſunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipſi æquales inter ſe. Quare ex definitione ſegmenta ABC, DEF, ſimilia erunt. Et quia latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia ſunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypob4. primi theſi; *b* erunt baſes AC, DF, æquales. Cum igitur ſegmenta ſimilia ABC, DEF, ſint c24. tertii. ſuper lineas æquales AC, DF, *c* erunt ipſa inter ſe æqualia. Quare ſi à circulis æqualibus demantur, remanebunt & ſegmenta AC, DF, inter ſe æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF. Quod eſt propoſitum.

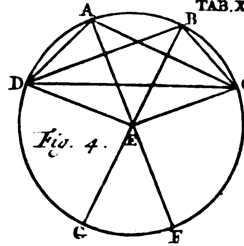
Sint deinde ad peripherias conſtituti duo anguli æquales B, & E; Dico rurſus, peripherias AC, DF, ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Erunt enim, ut prius, ſegmenta ABC, DEF, ſimilia. Cum igitur ſint ſuper æquales lineas AC, DF: d20. tertii. (cum enim anguli G, H, æquales ſint, *d* quod ſint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, e24. tertii. ut prius rectæ AC, DF, æquales) *e* erunt ipſa inter ſe æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & ſegmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

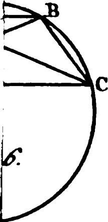
THEOR.

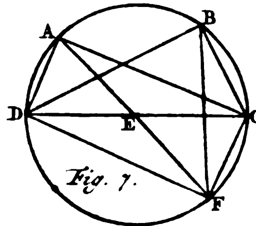
TAB. XII.

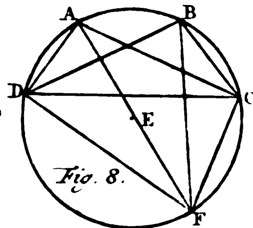


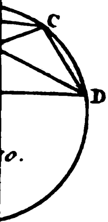












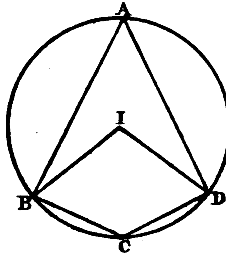


Fig. 11

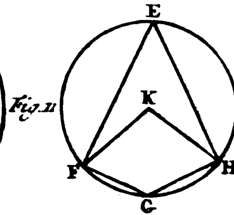
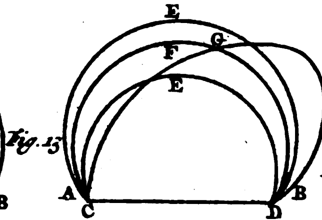
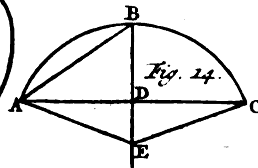
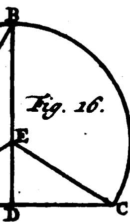




Fig. 13







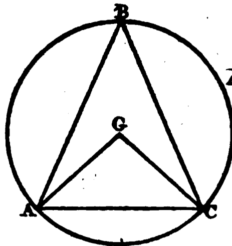
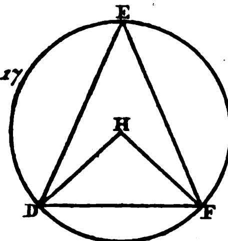


Fig. 17



THEOR. 24. PROPOS. 27. xxvii.

In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripheriis AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, major, fiatque angulus AGI, æqualis angulo DHF. *a* Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales. *TAB.XIII fig. 1.* *a 26. tertii.*

Insistant deinde eisdem peripheriis æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias: quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, ut ABC, major est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, *b* eruntque peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, &c. Quod demonstrandum erat. *b 26. tertii.*

SCHOLIUM.

Si vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet majori major angulus, sive ad centrum, sive ad circumferentiam, quam minori. Sit peripheria AC, major, quam peripheria DF. Dico angulum AGC, majorem esse angulo DHF, & angulum ABC, majorem angulo DEF, Si enim fiat peripheria CI, æqualis peripheriæ DF, *TAB.XIII. fig. 2.*

 ducan-

ducanturque recta IG, IB, erunt ut ostensum est, tam anguli ad centrum CGI, DHF, quam anguli ad circumferentiam CBI, DEF, æquales. Quare & angulus AGC, angulo DHF, & angulus ABC, angulo DEF, erit major.

Linea recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicujus ducitur tangens circulum, parallela est recta lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

TAB. XIII fig. 3. *In circulo ABC, cujus centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF, tangens circulum. Dico EF, parallelam esse rectæ BC, arcum BAC, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta DA, secante rectam*
h 27. tertii. *BC, in G, connexisque rectis DB, DC, h erunt anguli ADB, ADC, circumferentiis æqualibus AB, AC, insistentes, æquales: Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG,*
i 4. primi *trianguli CDG, æqualia, utrumque utrique. i Igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases GB, GC, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC, illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli*
k 13. primi *GAE, GAF, recti. k quod DA, perpendicularis sit*
l 28. primi *ad EF. l Ergo EF, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum.*

Angulus rectus in centro insistit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante majori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens vero arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante majori, obtusus.

TAB. XIII. fig. 4. *Rectus angulus ABC, insistat arcui AC, in centro B, circuli ACDE. Dico arcum AC, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt quoque anguli ABE, CBD, recto ABC, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non*
m 15. primi *& angulus DBE, rectus; m cum æqualis sit recto angulo*

angulo ABC, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales sunt, utpote recti: ac propterea n *arcus AC, CD, DE, EA, quibus insistunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum AB, in B, constituens angulum acutum, cadit in arcum AC: recta vero cum eadem AB, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum CD; liquidò constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum vero majori.* n 26.tertij.

Sed insistat jam quadranti AC, angulus ABC, in centro B. Dico angulum ABC, esse rectum, &c. Productis enim rursus rectis AB, CB, ad D, E; quoniam tam CAE, quam ACD, & AED, semicirculus est, estque AC, quadrans; erit tam AE, quam CD, quadrans quoque, ac proinde & DE, in semicirculo AED, quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, æquales, o *ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto angulo ABC; recta vero cum eadem AB, auferens majorem arcum quadrante AC, constituit in centro B, angulum recto angulo ABC, majorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; majori vero, obtusum. Quod est propositum.* o 27.tertij.

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxviij.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, majorem quidem majori, minorem autem minori.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales AC, DF. Dico majorem peripheriam ABC, æqualem esse majori DEF, & minorem AC, minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt TAB.XIII. fig. 5.

 latera

latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem
a 8. primi & bases AC, DF, æquales. Igitur *a* anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ
b 26. tertii. AC, DF, quibus insistunt, *b* æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Quod si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet major linea, majorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli majoribus sermo habeatur, major linea auferet minorem
TAB. XIII. fig. 6. *peripheriam, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sit recta AC, major, quam DF. Dico peripheriam AC, semicirculo minorem, majorem esse peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponitur autem basis*
c 25. primi *AC, major base DF. Igitur* c *angulus AGC, major erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo*
d 26. tertii. *DHF, æqualis; eritque propterea* d *peripheria CI, peripheriæ DF, æqualis; Ac proinde peripheria AIC, major, quam peripheria DF: Ideoque reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.*

xxix. THEOR. 26. PROPOS. 29.

In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

TAB. XIII. fig. 5. IN circulis eisdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ ABC, DEF; Item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas subtendunt, esse

æquales.

æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autem & anguli G, H, *a* æquales, quod æqualibus peripheriis AC, DF, insistant. Igitur *b* bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

a 27. tertii.
b 4. primi

SCHOLIUM.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet majorem major linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis majoribus semicirculo loquamur, subtendet majorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores AC, DF; sitque AC, major, quam DF; Ac proinde ABC minor, quam DEF. Dico lineam AC, majorem esse, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, major angulo DHF, ex scholio propos. 27. hujus lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sint lateribus DH, HF, trianguli DHF, c *erit basis AC, major base DF, &c.*

TAB XIII. fig. 6.

c 24. primi

PROBL. 4. PROPOS. 30.

xxx.

Datam peripheriam bifariam secare.

SIt peripheria ABC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, qua divisa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur *a* & bases AB, CB, æquales erunt; Ac propterea *b* peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendum.

TAB XIII. fig. 7.

a 4. primi
b 28. tertii.

XXXI. THEOR. 27. PROPOS. 31.

In circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in majore ſegmento, minor recto: qui vero in minore ſegmento, major eſt recto. Et inſuper angulus majoris ſegmenti, recto quidem major eſt: minoris autem ſegmenti angulus minor eſt recto.

TAB. XIII. fig. 8. Circuli enim ABC, cujus centrum D, diameter ſit AC, conſtituaturque in ſemicirculo angulus ABC, exiſtetque angulus BAC, in majori ſegmento CAB. Conſtituatur quoque in CEB, minori ſegmento angulus BEC. Dico angulum ABC, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum vero BAC, in majori ſegmento, minorem recto, & angulum BEC, in minori ſegmento, majorem recto. Item angulum majoris ſegmenti comprehenſum recta BC, & peripheria BAC, eſſe recto majorem. At angulum minoris ſegmenti comprehenſum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur (a 5. primi) rectæ DA, DB, æquales ſunt, *a* erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, æqualis, ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit. (b 32. primi) *b* Eſt autem & angulus FBC, externus eiſdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli ABC, FBC; ac propterea uterque rectus. Rectus igitur eſt angulus ABC; quod eſt primum.

(c 17. primi) Quoniam vero in triangulo ABC, *c* duo anguli ABC, & BAC, ſunt duobus rectis minores; Et eſt angulus ABC, oſtenſus rectus: Erit angulus BAC, in ſegmento majori, recto minor; quod eſt ſecundum.

Rurſus quia in quadrilatero ABEC, intra circulum

culum descripto, *d* duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto major; quod est tertium. d 22. tertii.

Amplius cum angulus rectus ABC, pars sit anguli segmenti majoris ABC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC; erit angulus segmenti majoris, recto major, quod est quartum.

Postremo, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta BC, & peripheria BEC, pars sit quoque anguli recti FBC; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est, eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis.

THEOR. 28. PROPOS. 32. xxxii.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TAngat recta AB, circulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, dividens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, recta CE, per centrum. *a* Erit igitur uterque angulus ACE, BCE, rectus: *b* Sunt autem & anguli CGE, CDE, in semicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo TAB. XIII. fig. 9. a 18. tertii. b 31. tertii.

angulo CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis eſt.

TAB.XIII. fig. 10. Non tranſeat jam CE, recta per centrum. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur
c 18.*tertii.* recta EF: *c* eritque CF, perpendicularis ad AB,
d 31.*tertii.* *d* & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt uni recto, ut angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE,
e 21.*tertii.* æqualis: *e* Eſt autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cum uterque ſit in ſegmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero CDEG,
f 22.*tertii.* duo *f* anguli CDE, CGE, duobus ſunt rectis æ-
g 13.*primi* quales: *g* Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales; ſi auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod erat oſtendendum.

xxxiij. PROBL. 5. PROPOS. 33.

Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

TAB.XIII. fig. 11. RECTA data ſit AB, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur ſuper AB, ſegmentum deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis angulo recto dato C. Diviſa AB, bifariam in D, deſcribatur centro D, intervallo autem DA, vel DB, ſemicirculus AEB; factumque
a 31.*tertii.* erit, quod proponitur. Nam *a* angulus AEB, in deſcripto ſemicirculo rectus eſt, ideoque æqualis angulo C, recto.

TAB.XIII. fig. 12. Sit deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ cadet ſupra AB. Fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, ſecetque BF, rectam AE, in

in F. *b* Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. Quare si centro F, & intervallo FA, circulus describatur AGB, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento AGB, quod descriptum est super AB, esse æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento AGB. Quia igitur AE, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. hujus lib. Quapropter *c* angulus DAB, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno AGB. b 6. primi c 32. tertii.

Sit tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus IAB, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quæ supra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, descriptumque erit super AB, segmentum AKB, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nam angulus IAB, hoc est, angulus datus H, *d* æqualis est angulo K, in alterno segmento AKB. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat. d 32. tertii.

PROBL. 6. PROPOS. 34. xxxiv.

A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Datus circulus sit ABC, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. *a* Ducatur recta EF, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum ACB, in segmento ablato ACB, æqualem esse dato angulo D. Est enim *b* angulus FAB, æqualis angulo C, in alterno segmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus FAB, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscidimus TAB. XIII. fig. 13. a 17. tertii. b 32. tertii.

dimus segmentum ACB, &c. Quod erat faciendum.

XXXV. THEOR. 29. PROPOS. 35.

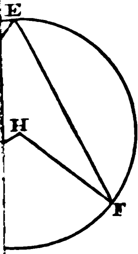
Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

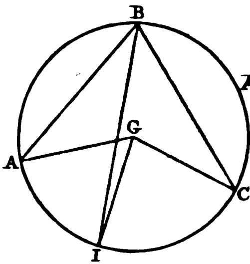
TAB XIV. fig. 1. In circulo ACBD, secent se mutuo rectæ AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim utraque linea transit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Transeat primum utraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus unius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex iis, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

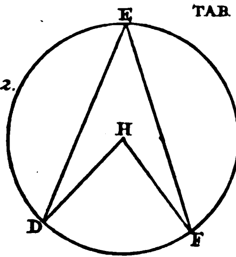
fig. 2. Transeat deinde CD, sola per centrum F, dividatque primum rectam AB, bifariam, *a* ac propterea ad angulos rectos, conjungaturque recta BF. Quoniam igitur CD, divisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E, *b* erit rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoque quadrato rectæ FB, cum rectæ FD, FB, sint æquales: Est autem quadratum rectæ FB, *c* æquale quadratis rectarum FE, EB. Igitur rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quoque erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB, cum AE, EB, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex iis, quæ ad defin. 1. lib. 2. scripsimus. Divi-

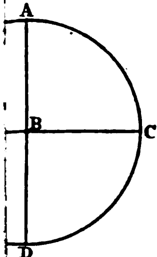
a 3. tertii.
b 5. sec.
c 47. primi

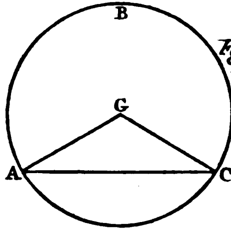
TAB. XIII.

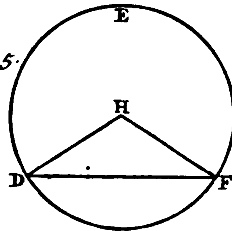

E
H
F

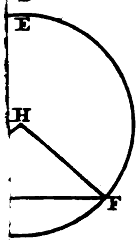

B
G
A
C
I
Fig. 2.

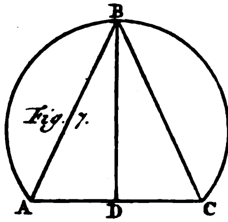

E
H
D
F

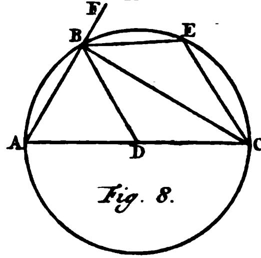

A
B
C
D

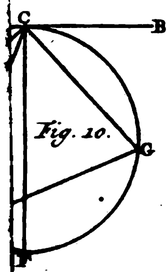

B
Fig. 5.
G
A
C

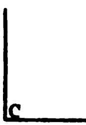

E
H
D
F

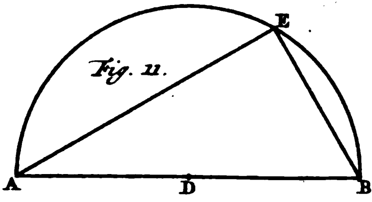

E
H
F

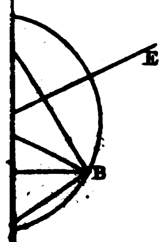

B
Fig. 7.
A
D
C

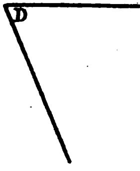

F
B
E
A
D
C
Fig. 8.

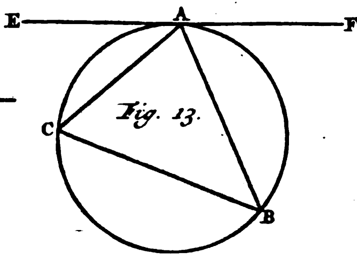

C
B
Fig. 10.
G


C


E
Fig. 11.
A
D
B


E
B


D


E
A
F
Fig. 13.
C
B

Dividat jam CD, transiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ FG, FB, *d* eritque FG, perpendicularis ad AB. Quoniam vero rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ FE, *e* æquale est quadrato rectæ FD, hoc est, quadrato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ FE, *f* æquale quadratis rectarum FG, GE, & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB: erit quoque rectangulum sub CE, ED, una cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, una cum quadrato rectæ GE, *g* æquale est eidem quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB, secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, una cum quadrato ejusdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB. Quod est propositum.

fig. 3, 4.
d 3. tertii.
e 5. sec.
f 47. primi
g 5. sec.

Tertio neutra per centrum transeat, sive una illarum bifariam dividatur, sive neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH: sive AB, dividatur bifariam, sive non: Item rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH; sive CD, secta sit bifariam, sive non; Erit rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED, quod est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, &c. Quod demonstrandum erat.

fig. 5, 6.

THEOR.

XXXVI. THEOR. 30. PROPOS. 36.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum; æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

TAB. XIV. fig. 7. a 17. tertii. Extra circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, a & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat enim primum recta b 18. tertii. DA, per centrum E, & jungatur recta EB, b quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, divisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum c 6. sec. & continuum CD, c erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EC, hoc est, cum quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ DE: d 47. primi Est autem quadratum rectæ DE, d æquale quadratis rectarum EB, BD. Quare rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarum DB, BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale. Quod est propositum.

TAB. XIV. fig. 8, 9. e 18. tertii. f 3. tertii. Non transeat jam DA, secans per centrum E. Divisa ergo AC, bifariam in F, ducantur rectæ EB, EC, ED, EF; e eritque EB, ad BD, perpendicularis; f & EF, ad AC. Quoniam igitur g 6. sec. CA, divisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, g erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum

DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, FE, *b* æquale quadratum rectæ EC, ideoque & quadratum rectæ EB; Et *i* quadratis rectarum DF, FE, æquale est quadratum rectæ DE. Quare rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum rectæ DE, *k* æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

b 47. primi
i 47. primi
k 47. primi

COROLLARIUM. I.

Hinc manifestum est, si à puncto quovis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus inter se esse æqualia. Ut si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum, *l* erunt quadrato rectæ AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.

TAB. XIV. fig. 10.
l 36. tertii.

COROLLARIUM. II.

Constat etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum: quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quam quadratum rectæ AC, *m* æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.

TAB. XIV. fig. 11.
m 36. tertii.

COROLLARIUM. III.

Perſpicuum quoque eſt, ab eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſe duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci
TAB XIV. fig. 12. poſſit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis re-
n 18. tertii. ctis EB, ED, ex centro E, n erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod eſt abſurdum. Nam ſi
o 21. primi ducatur recta AE, o erit angulus ADE, major angulo ABE.

Aliter. Si tertia AD, circulum etiam tangat; erunt duæ tangentes AB, AD, æquales, ut oſtenſum eſt; quod eſt abſurdum. Ducta namque recta AE, ad
p 8. tertii. centrum E, quæ circulum ſecet in F, p erit AD, cum ſit propinquior minimæ AF, minor, quam AB, quæ à minima AF, remotior eſt. Vel ſic. Si AB, AD, ſunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipſis AD, DE, æquales, quod eſt abſurdum.
q 21. primi q Sunt enim majores AB, BE. Solum igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant: Quod eſt propoſitum.

COROLLARIUM. IV.

Illud denique conſtat etiam, ſi duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in convexam peripheriam incidant, & earum una circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Ut ſi duæ rectæ AB, AC, ſint æquales,
TAB. XIV. fig. 12. & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD, tangens, eruntque ex 2. coroll. AC, AD, æquales. Cum ergo & AB, ipſi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod eſt abſurdum.
r 8. tertii. r Duæ enim tantum duci poſſunt.
TAB. XIV. fig. 13. Aliter. Ponantur duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE,
s 8. primi æqualia, & baſis DE, communis. s Igitur anguli B,
t 18. tertii. F, æquales erunt: t Sed B, rectus eſt. Igitur & F, rectus erit, atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propoſ. 16. hujus lib.

THEOR.

THEOR. 31. PROPOS. 37. xxxvij.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & convexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur, quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.

Extra circulum ABC, cujus centrum E, punctum ſumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum ſecans in C, & recta DB, incidens in circulum ejuſque punctum B; ſitque rectangulum ſub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B. *a* Ducatur enim DF, tangens circulum, & jungantur rectæ EB, EF. Quod ſi DA, ſecans non tranſeat per centrum E, jungatur quoque recta DE. Quoniam igitur rectangulo ſub DA, DC, *b* æquale eſt quadratum rectæ tangentis DF: Et eidem rectangulo ſub DA, DC, æquale ponitur quadratum rectæ DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter ſe æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter ſe erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia ſunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; & baſis DE, communis, *c* erunt anguli DFE, DBE, æquales. *d* Atqui angulus DFE, rectus eſt, quod DF, circulum tangat. Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propoſ. 16. hujus lib. DB, circulum tanget; quod eſt propoſitum. Si ergo extra circulum ſumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonſtrandum.

TAB. XIV. fig. 13.

a 17. *tertii.*

fig. 14.

b 36. *tertii.*

c 8. *primi.*

d 18. *tertii.*



EUCLIDIS
ELEMENTUM
QUARTUM.

DEFINITIO. I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera ejus, in qua inscribitur, tangunt.



Gens Euclides quarto hoc libro de variis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens à rectilineis figuris: Si igitur anguli
TAB.XIV. *D, E, F, trianguli interni DEF, tangant latera*
fig. 15. *AB, AC, BC, trianguli externi ABC; dicetur triangulum DEF, in triangulo ABC, esse inscriptum.*
fig. 16. *At quoniam angulus M, trianguli KLM, non tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inscribi in triangulo GHI, quamvis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.*

DEFI-

DEFINITIO. II.

Similiter & figura circum figuram describi dicitur, cum singula ejus, quæ circumscribitur, latera singulos ejus figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E Contrario dicetur triangulum ABC, describi circa triangulum DEF; quoniam singula latera illius singulos hujus angulos tangunt; At triangulum GHI, non dicetur descriptum esse circa triangulum KLM, propterea quod latus illius HI, angulum hujus M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum. TAB.XIV. fig. 15. 16.

DEFINITIO. III.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

UT si tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si vel unus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo. TAB.XV. fig. 1.

DEFINITIO. IV.

Figura vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera ejus, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT vero si latera trianguli ABC, singula tangant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum. TAB.XV. fig. 2.

DEFINITIO. V.

Similiter & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ, cui inscribitur.

DEFINITIO. VI.

Circulus autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit ejus figuræ, quam circum scribit, angulos.

TAB. XV. fig. 2, 1. *Vicissim dicetur circulus DEF, inscriptus esse in triangulo ABC: At vero circulus ABC, descriptus esse circa triangulum ABC. Idem judicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.*

DEFINITIO. VII.

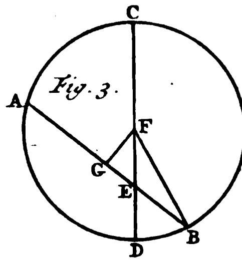
Recta linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.

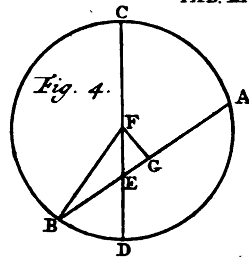
TAB. XV. fig. 3. *Ut recta linea AB, quoniam ejus extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel CD; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.*

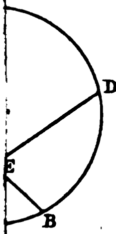
PROBL.

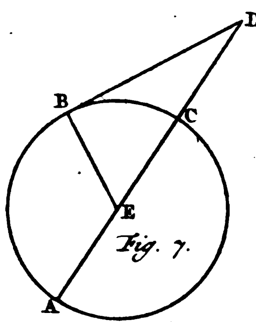
TAB. XIV.

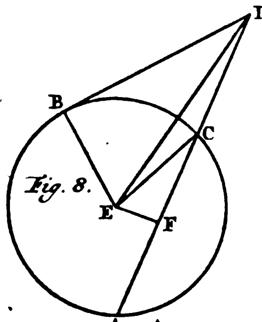

B
E

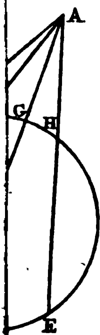

C
Fig. 3.
A
F
G
E
B
D

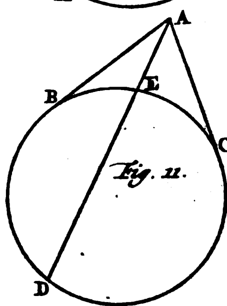

C
Fig. 4.
A
F
G
E
B
D

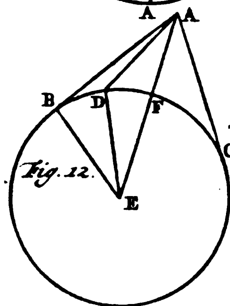

D
E
B

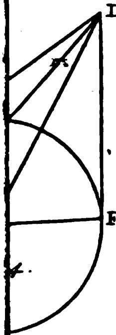

D
B
C
E
Fig. 7.
A

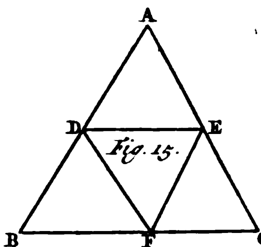

D
B
C
Fig. 8.
E
F
A

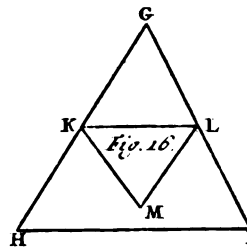

A
G
H
E


A
B
E
C
Fig. 11.
D


A
B
D
F
C
Fig. 12.
E


D
F


A
D
E
Fig. 15.
B
F
C


G
K
L
Fig. 16.
M
H
I

PROBL. I. PROPOS. I.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit major.

IN circulo ABC, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen major non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter *a* sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro major foret, non posset in circulo aptari illi una æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit BC, illi æqualis: Si vero D, minor fuerit diametro, *b* abscindatur BE, æqualis ipsi D, & centro B, intervallo autem BE, circulus describatur EA, secans circulum ABC, in A, ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. *c* Est enim BA, æqualis ipsi BE, & D, æqualis eidem BE, per constructionem. Quare AB, & D, inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodavimus, &c. Quod faciendum erat.

TAB. XV. fig. 4.

a 15. *tertii.*

b 3. *primi*

c 15. *def. primi.*

PROBL. 2. PROPOS. 2.

In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIt in circulo ABC, dato describendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC, angulo E, atque extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam usque in puncta B, & C, conjungaturque recta BC. (Non cadet autem recta AC, in rectam AB, vel inter rectas AB, AG: propterea quod

TAB. XV. fig. 5.

a 17. primi anguli GAB, HAC, hoc est anguli F, E, *a* minores sunt duobus rectis. *b* Essent autem duobus rectis æquales, si AC, in AB, caderet; vel majores duobus rectis, si inter AB, AG, caderet.) Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, *c* æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, *d* æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli DEF, *e* erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

(Marginal notes: b 13. primi; c 32. tertii; d 32. tertii; e 32. primi)

iij. PROBL. 3. PROPOS. 3.

Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

TAB. XV. fig. 9, 10. CIrca circulum datum ABC, describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo DEF. Producto latere EF, utrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta utcunque AI, & fiat angulus AIB, æqualis angulo DEG, & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares KL, LM, MK, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta AC, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores, ac proinde AK, CK, coibunt, *d* &c. Nam recta hæc ducta AC, caderet supra rectas AI, CI, quod hæ angulum constituant in I. Cum enim spatium circa I, æquale

(Marginal note: d 13. primi)

æquale sit quatuor rectis ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F *b*, sintque duo anguli AIB, CIB, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum spatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed *a* hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC. Alias spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum AI, CI, unam rectam lineam constituerent; vel majus duobus rectis, si recta AI, producta, caderet supra IC. Cadit igitur necessario AI, producta intra CI, atque idcirco angulus fiet AIC, ad partes K, & ducta recta AC, faciet cum AK, CK, duos angulos minores duobus rectis, *g* ideoque rectæ AK, CK, coibunt in K. Non secus ostendemus, AL, BL, coire in L, & CM, BM, in M: quia ductæ rectæ AB, BC, facient cum AL, BL, CM, BM, angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circulum triangulum KLM, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero AIBL, æquales sunt quatuor rectis, ut ad 32. propos. lib. 1. ostensum fuit, & anguli IAL, IBL, sunt duo recti, erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur *b* & anguli DEG, DEF, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo DFE. *c* Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

b 13. primi

a 17. primi

g 13. prim.

b 13. primi

c 32. primi

PROBL. 4. PROPOS. 4. iv.

In dato triangulo circulum inscribere.

SIt describendus circulus in dato triangulo ABC. Divisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis

TAB. XV. fig. 11.

K 5 rectis

b 9. primi rectis BD, CD *b*, quæ intra triangulum coeant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG *c*. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales sunt duobus angulis, DBF, DFB, trianguli DBF, uterque utrique; & latus BD, commune; *a* erunt quoque latera DE, DF, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cum igitur tres rectæ DE, DF, DG, sint æquales; circulus ex D, ad intervallum DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G *d*; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia sint ad semidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

c 12. primi

a 26. primi

d 15. def. primi.

V. PROBL. 5. PROPOS. 5.

Circa datum triangulum circulum describere.

TAB. XV. fig. 12, 13, 14.

SIt circulus describendns circa datum triangulum ABC. Dividantur duo latera AC, AB, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtusangulo sumenda sunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtusum angulum, quamvis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quævis latera bifariam possint secari) bifariam in D, & E *e*, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti; *a* erunt bases FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad intervallum FA, transibit quoque per puncta B, & C.

e 10. primi

a 4. primi

Circa

Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, *b* omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in majori segmento circuli: si vero sit in latere BC, *c* angulum BAC, ei lateri oppositum, esse rectum quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, *d* angulum oppositum BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli. b 31. *tertii.* c 31. *tertii.* d 31. *tertii.*

Contra vero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, sive absurdum. Quia si in acutangulo caderet centrum in unum latus, esset angulus ei oppositus rectus: si vero extra, esset idem angulus obtusus. Item si in rectangulo centrum caderet intra, essent omnes anguli acuti, si vero extra, esset angulus oppositus obtusus. Denique si in triangulo obtusangulo caderet in unum latus, esset angulus ei oppositus, rectus, si vero intra, omnes anguli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte hujus coroll. colliguntur, & pugnant cum hypothesi.

PROBL. 6. PROPOS. 6. vi.

In dato circulo quadratum describere.

SIt in dato circulo ABCD, cujus centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se se ad angulos rectos in centro E, & jungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli CEB, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; *a* erunt bases AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD: Item rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB. TAB. XV. fig. 15. a 4. primi.

AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod brevius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales
b 26. tertii. sunt, nimirum recti; *b* erunt quatuor arcus, quibus insistunt, æquales: *c* ac proinde & rectæ qua-
c 29. tertii. tuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt.
d 31. tertii. Sunt autem *d* & anguli recti, cum omnes in se-
e 19. def. primi. micirculis existant. Quare quadratum erit ABCD *e*, proptereaque in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

vij. PROBL. 7. PROPOS. 7.

Circa datum circulum quadratum describere.

TAB. XV. fig. 16. SIt circa datum circulum ABCD, cujus centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H,
d 13. pron. I, G. *d* Quod enim coeant AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores; atque ita de reliquis. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli
a 28. primi AEB, FBE, sint recti, *a* erunt FH, AC, parallelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ.
b 30. primi *b* Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur
c 34. primi parallelogrammum est ACHF, *c* erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales: Sed ACH, est rectus. Igitur AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse: & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGIH,

FGIH, quadratum erit; cujus quidem latera circulum tangunt, per corollarium propoſ. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum deſcripſimus: Quod erat efficiendum.

PROBL. 8. PROPOS. 8. viij.

In dato quadrato circulum deſcribere.

SIt in dato quadrato ABCD, inſcribendus circulus. Diviſis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, ſecantes ſe in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales ſunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales & parallelæ. *a* Quare & AB, parallela eſt, & æqualis ipſi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipſi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter ſe æquales, cum ſint ſemiſſes æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus deſcriptus ex I, ad intervallum IE, tranſibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. *b* quod anguli ad E, F, G, H, ſint recti, deſcriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum deſcripſimus. Quod efficiendum erat.

TAB. XV. fig. 17.

a 33. primi

b 29. primi

PROBL. 9. PROPOS. 9. ix.

Circa datum quadratum circulum deſcribere.

SIt deſcribendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, ſecantes ſe in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſunt *a* erunt anguli ABD, ADB, æquales:

TAB. XV. fig. 18.

a 5 primi

b 32. primi les: Est autem angulus BAD, rectus. *b* Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; c 6. primi *c* erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB, EC. Item EC, ED. Quare circulus ex E, descriptus, intervallo EA, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

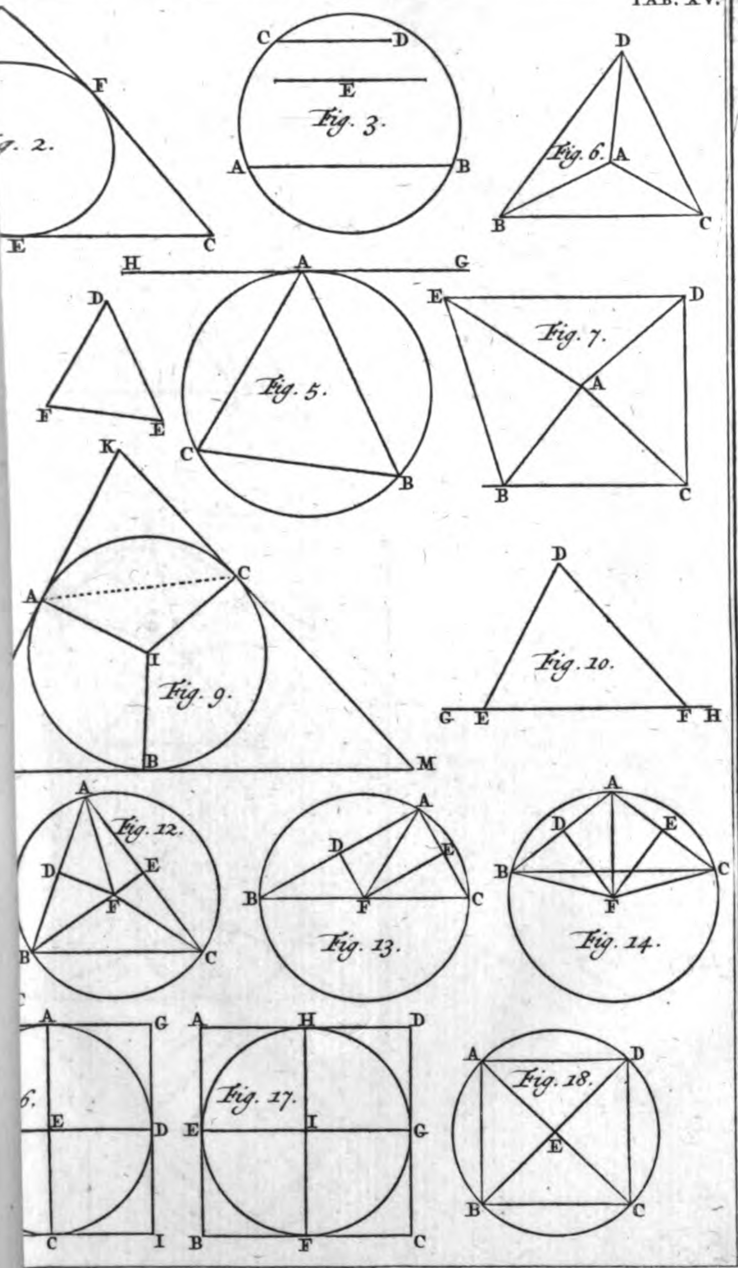
TAB. XVI. fig. 1. *Quod si circa datum circulum EFGH, describatur quadratum ABCD, & in eodem circulo aliud quadratum EFGH, inscribatur, erit quadratum circumscriptum ABCD, quadrati inscripti HEFG, duplum. Quoniam enim latus AB, quadrati circumscripti æquale est diametro HF, circuli, ut ex 7. propos. hujus lib. constat, hoc est, diametro HF, quadrati inscripti HEFG: quadratum vero diametri HF, duplum est quadrati HEFG, cujus est diameter, ut ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.*

x. PROBL. 10. PROPOS. 10.

Isosceles triangulum constituere; quod habeat utrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum duplum reliqui.

TAB. XVI. fig. 2. a 11. sec. b 1. quart. SUmatur quævis recta linea, AB, quæ *a* dividatur in C, ita ut rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, intervallo vero AB, circulus describatur, in quo *b* accommodetur recta BD, æqualis ipsi AC, jungaturque recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum ABD, Isosceles. Dico utrumque angulorum ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A.

TAB. XV.


Fig. 2.
F
E
C
C
D
E
Fig. 3.
A
B
D
Fig. 6.
A
B
C
H
A
G
D
F
E
Fig. 5.
C
B
E
D
Fig. 7.
A
B
C
K
C
A
I
Fig. 9.
B
M
D
Fig. 10.
G
E
F
H
A
Fig. 12.
D
E
F
B
C
A
D
E
B
F
C
Fig. 13.
A
D
E
B
C
F
Fig. 14.
A
G
E
D
C
I
A
H
D
Fig. 17.
E
I
G
B
F
C
A
D
Fig. 18.
E
B
C

A. Ducta enim recta CD, *c* describatur circa triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulum sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ BD, & recta AB, secat circulum DCA, *d* tanget recta BD, eundem circulum DCA, in D. Quare angulus BDC, *e* æqualis est angulo A, in alterno segmento CAD. Addito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eisdem *f* æqualis est etiam angulus externus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc est, angulo ABD, *g* cum ABD, ADB, æquales sint; ac propterea *h* rectæ CD, BD, æquales erunt: Est autem BD, æqualis posita rectæ AC. Igitur & CD, ipsi CA, æqualis erit; *i* ac propterea anguli CAD, CDA, æquales. Angulus igitur ADB, qui æqualis ostensus est duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus ABD, duplus erit ejusdem anguli A. Isosceles ergo Triangulum constituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.

c 5. quart.
d 37. tertii.
e 32. tertii.
f 32. primi
g 5. primi
h 6. primi
i 5. primi

COROLLARIUM.

Quoniam vero tres anguli trianguli ABD, *k* æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum: perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; utrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes unius recti, & utrumvis B, D, quatuor quintas partes; quandoquidem omnes tres *l* æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis unius recti.

k 32. primi
l 32. primi

PROBL. 11. PROPOS. 11. xi.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIt in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Con-

TAB. XVI. fig. 3.

a 10 quart. a Construatur triangulum Isosceles, FGH, ita ut uterque angulorum G, H, duplus sit reliqui F, b 2 quart. & in circulo b inscribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & uterque angulorum ACD, ADC, c bifariam dividatur rectis CE, DB, atque rectæ jungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inscriptum, esse æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim uterque angulorum ACD, ADC, duplus sit anguli CAD, & divisus bifariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, æquales. d Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, super quos ascenderunt, atque idcirco e & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt, æquilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB, ED, æquales sunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. f Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus insistentes, æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus, quorum singuli ex ternis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod faciendum erat.

c 9. primi

d 26. tertii.

e 29. tertii.

f 27. tertii.

COROLLARIUM.

Sequitur hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel sex quintas unius recti. g Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales sint, utpote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, insistant, sit autem CAD, per coroll. præcedentis propos. quinta pars, duorum rectorum, vel duæ quintæ unius recti: erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum, vel sex quintæ unius recti.

g 27. tertii.

PROBL.

PROBL. 12. PROPOS. 12. xij.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

SIt circa datum circulum ABCDE, deſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Inſcribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum enim anguli GAE, GEA, duobus ſint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; *b* coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & ſic de aliis. Et quia ipſæ tangunt circulum, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. erit deſcriptum pentagonum GHIKL, circa circulum; quod dico eſſe æquilaterum atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL, erunt quadrato rectæ FH, *c* æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quam rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia erunt quadratis rectarum FB, BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æquales erunt. Quod etiam conſtat ex coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. cum AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera AF, FH, trianguli AFH, æqualia ſunt lateribus BF, FH, trianguli BFH. Eſt autem & baſis AH, baſi BH, æqualis, ut oſtenſum eſt; *d* erunt anguli AFH, BFH, æquales. Igitur *e* & anguli AHF, BHF. Duplus igitur eſt angulus AFB, anguli BFH; & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo oſtendemus, angulum BFC, duplum eſſe anguli BFI, & angulum BIC, anguli BIF. Cum igitur *f* anguli AFB, BFC, ſint æquales, quod inſiſtant

TAB. XVI. fig. 4
a 11. quart.
b 13. pron.
c 47. primi
d 8. primi
e 14. primi
f 27. tertii

g 28. tertii. ſiſtant circumferentiis AB, BC, g quæ æquales ſunt, cum à rectis æqualibus ſubtendantur AB, BC; erunt & dimidii eorum BFH, BFI, æquales. Quocirca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales ſint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus illis adjacens commune BF, h erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla eſt ergo recta HI, rectæ HB. Eademque ratione oſtendemus GH, rectam duplam eſſe rectæ AH. Sunt autem oſtenſæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erunt. Similiter demonſtrabimus, rectas IK, KL, LG, æquales eſſe cuilibet rectarum HI, HG. Æquilaterum ergo eſt pentagonum GHIKL. Rurſus quoniam oſtenſum eſt, angulos BHF, BIF, æquales eſſe, ac ſemiſſes angulorum BHA, BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Æquiangulum igitur eſt pentagonum GHIKL. Quapropter cum & æquilaterum ſit oſtenſum, deſcriptum erit circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

h 26. primi

COROLLARIUM.

Sequitur ex hujus problematis demonſtratione; ſi in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares conſtituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumſcriptam. Eadem enim ſemper ratione demonſtrabitur, illas perpendiculares concurrere, anguloſque conficere æquales, ſi nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, ut in pentagono factum eſt: quæ quidem ipſos angulos bifariam ſecabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum eſt, &c.

In

SCHOLIUM.

In figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quovis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, dividit quoque angulum bifariam; Et contra, recta linea dividens angulum bifariam, secat quoque latus oppositum bifariam: Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quovis angulo ad oppositum angulum ducta secat utrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea secans quemvis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque dividit.

Sit primum figura æquilatera, æquiangulaque imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa recta AH, secet latus oppositum DE, bifariam. TAB.XVI. fig. 5. *Dico angulum quoque BAG, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, æqualia sunt angulosque continent æquales, ex hypothesi;* i *erunt & bases AC, AF,* i 4. primi *æquales, & tam anguli BAC, GAF, quam BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, ponantur æquales; erunt quoque reliqui ACD, AFE, æquales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia sunt, continentque angulos æquales, ut ostensum est;* k *erunt &* k 4. primi *bases AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quam CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum perventum sit. Ubi quia rursus toti anguli CDE, FED, æquales sunt; erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia sint, angulosque æquales contineant,* l *erunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quo-* l 4. primi *circa cum quotvis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint æquales, singuli singulis; erit quoque totus angulus BAH,*

toti angulo GAH æqualis; ac proinde angulus BAG, sectus erit bifariam. Quod est propositum.

Sed jam recta AH, secet angulum BAG, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans DE, bifariam, secabit eadem & angulum BAG, bifariam, ut jam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, secabunt bifariam, quod est absurdum, cum una medietas major esset quam altera. Recta ergo AH, secans angulum BAG, bifariam, secat quoque latus DE, bifariam. Quod est propositum.

Sit deinde figura æquilatera, & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppositum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, secare tam angulum BAH, quam DEF, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis, demonstrabimus, ut in antecedente figura, quotvis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, esse æquales singulos singulis; ideoque totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem esse, nec non & angulum DEA, FEA, esse æqualem. Uterque igitur angulus BAH, DEF, secatur bifariam. Quod est propositum. (*TAB. XVI. fig. 6.*)

Sed jam recta EA, secet angulum BAH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eumque dividere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A, ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH, bifariam, ut jam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam secabunt, quod est absurdum. Recta ergo AE, secans angulum BAH, bifariam, cadit in E, secatque propterea, ut demonstratum est proxime, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.

xiij. PROBL. 13. PROPOS. 13.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

TAB. XVI. fig. 7. SIt inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. Dividantur duo ejus anguli BAE, ABC,

ABC, proximi bifariam *a* rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cum enim ex scholio præcedentis propositionis rectæ AF, BF, secent opposita latera CD, DE, bifariam, necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuo intra pentagonum secare, priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF, CBF; *b* erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Divisus est ergo angulus BCD, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, divisos esse bifariam. Ducantur jam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis, FLA, FAL, trianguli FAL; estque latus AF, subtensum uni æqualium angulorum commune *c* erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet illarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & intervallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cum semidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

a 9. primi

b 4. primi

c 26. primi

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

Sit circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Divisis *TAB. XVI. fig. 8.*

b 9. primi visis duobus angulis BAE, ABC, bifariam *b* rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, ut in antecedente propos. demonstratum est; & conjunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, ut in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos BCD, CDE, DEA. sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidii inter se æquales, quod toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt
a 6. primi FAB, FBA; *a* erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, intervallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

XV. PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inscribere.

TAB. XVI. fig. 9. SIt in dato circulo ABCDEF, cujus centrum G, inscribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro AD, describatur circulus ex centro D, intervallo vero DG, qui secet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis sit rectæ GD, & recta DC, æqualis eidem rectæ DG, ex definitione circuli: erunt & rectæ GC, DC, æquales inter se: Ideoque triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare *a* tres
a 5. primi anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se
b 32. primi erunt: qui cum *b* æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum: Sunt autem

tres

tres anguli CGD, DGE, EGF, *c* æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales; quibus cum etiam *d* æquales sint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC; erunt sex anguli ad centrum G, æquales. *e* Quare circumferentiæ, quibus insistunt, *f* ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia BC, æqualis est circumferentiæ AF; si addatur communis CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, *g* æquales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui composito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

c 13. *primi*
d 15. *primi*
e 26. *tertii*
f 29. *tertii*
g 27. *tertii*

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale est semidiametro DG, ex definitione circuli.

PROBL. 16. PROPOS. 16. xvi.

In dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIt in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex corol. propos. 5. lib. 1. erit etiam æquiangulum; *a* inscribatur ei æquiangulum triangulum ABC. in

TAB XVI. fig. 10.
a 2. *quart.*

in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum,
b 16. vel ex coroll. propos. 6. lib. 1. b eruntque tres arcus
28. tertii. AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas
AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales
angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium
igitur partium æqualium quindecim est circumferentia tota ABC, talium quinque erit arcus AB,
c 11. quart. qui tertia pars est totius circumferentiæ. c Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum AEFGH, applicans unum
d 28 tertii. angulorum ad punctum A, d eruntque quinque arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinque, & arcus AE, tres; continebit reliquus
e 30. tertii. arcus EB, duas. e Diviso ergo arcu EB, bifariam in I, erit arcus BI, pars decima quinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BI, subtendet decimam quintam partem totius circumferentiæ;
f 1. quart. cui si aliæ quatuordecim, f æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quin-
g 27. tertii. tidecagonum æquilaterum, quod g & æquiangulum est, cum ejus anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, ut perspicuum est, In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

Similiter autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

EUCLI-



EUCLIDIS ELEMENTUM QUINTUM.

EGit in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed prout una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad ullam quantitatis speciem, ut ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Ut igitur institutum suum servet, definit prius vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.

DEFINITIO I.

Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.

ITaque ait magnitudinem illam minorem, quæ majorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Ut quoniam magnitudo A, ter sumpta, TAB.XVI. fig. 11.

metitur magnitudinem B, sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit à magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DEFINITIO II.

Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem.

TAB.XVI. fig. 11. *UT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A, quoniam hæc utramque illam metitur. At vero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D, propterea quod hæc neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita ut minor quantitas mensurans majorem, dicatur pars majoris; Major vero mensurata à minori, dicatur minoris multiplex.*

Cæterum quando duæ magnitudines minores duas alias majores æque metiuntur, hoc est, una minor in una majore toties continetur, quoties altera minor in altera majore; dicuntur duæ hæ majores duarum illarum minorum æque multiplices. Quod idem dices, si plures minores æque metiantur plures majores.

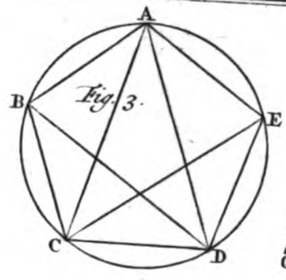
DEFINITIO III.

Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam secundum quantitatem, habitudo.

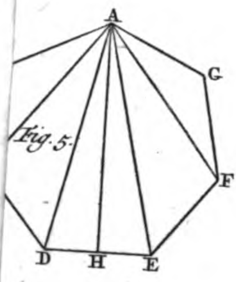
QUando duæ quantitates ejusdem generis, ut duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida,

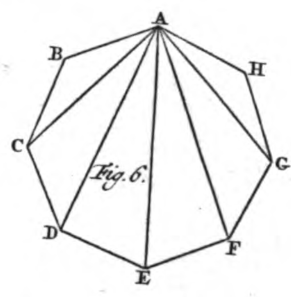
TAB. XVI.

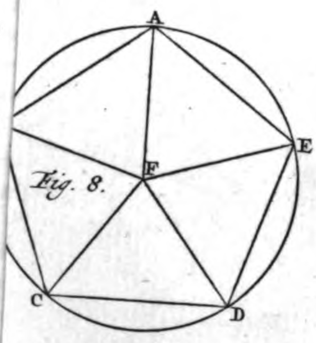

2.
D

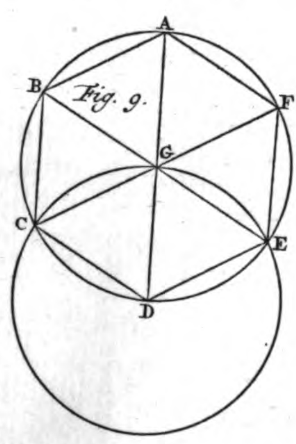

A
B
Fig. 3.
E
C
D


F
G
H

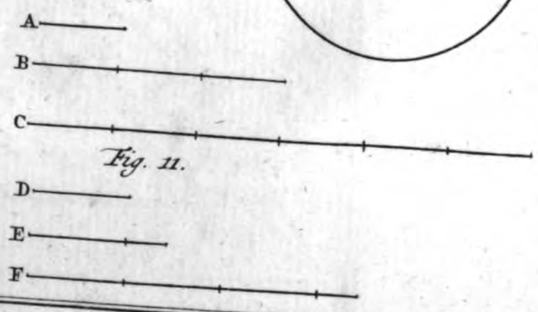

A
G
Fig. 5.
F
D
H
E


A
B
H
C
Fig. 6.
G
D
F
E


A
E
F
Fig. 8.
C
D


A
B
Fig. 9.
F
G
C
E
D


H
C


A
B
C
Fig. 11.
D
E
F

da, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod una major est, quam altera, vel minor, vel æqualis; appellatur hujusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio; seu (ut aliis placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint ejusdem generis quantitatis. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est secundum quod una est alba, & altera nigra; aut quod una est calida, & altera frigida, &c. quamvis ambæ sint ejusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

Quamquam autem in solis quantitatibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cujusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Ut cum dicimus, tempus tempore esse majus, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur ejusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

Cæterum in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris aliis antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Ut in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si e contrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, consequens vero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

DEFI-

DEFINITIO. IV.

Proportio vero est rationum similitudo.

Quod hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Ut si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni, F, ad G, appellabitur hæc similitudo proportionalitas.

TAB. XVII. fig. 1. fig. 2.

Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita ut nulla fiat proportionum interruptio, sed quælibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis antecedentis. Ut si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G, vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita ut fiat proportionum interruptio, nullaque quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Ut si dicatur, quæ proportio A, ad B, ea est C, ad D, appellabitur proportionalitas hæc, discreta, sive non continua.

fig. 2.

fig. 1.

DEFI-

DEFINITIO. V.

Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QUoniam Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum ejusdem generis, vocaverat rationem, quam nos cum aliis auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates ejusdem generis, ut proportionem dicantur habere. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum utravis multiplicata ita augetur, ut alteram tandem superet, adeo ut si alterutra quantumvis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur.

DEFINITIO. VI.

In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque vel una deficiunt, vel una æqualia sunt, vel una excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

EXplicat hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, ut complectatur omnes proportiones magnitudinum,

tam

tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quartæ sumanturque prima, & tertia æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secundæ, & quartæ alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, sive hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, & quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, sive non. Quod si jam inter se conferantur sumpta æque multiplicia ea, quæ inter se respondent, ut multiplex primæ, & multiplex secundæ inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter se, hoc est, F, & H; deprehensumque fuerit perpetuo, ea ita inter se habere, ut si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, majus fuerit quam G; etiam F, majus sit quam H: (quod est utrumque ab utroque vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere) ita ut in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, ut nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & ut nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale. Denique ut nunquam E, majus sit quam G, quin & F, majus sit, quam H. Si inquam deprehensum fuerit, æque multiplicia quævis accepta, perpetuo se se ita habere, ut dictum est; dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo uno genere multiplicium, multiplex

TAB. XVII. fig. 3.

tiplex E, deficere à multiplici G, non autem multiplex F, deficere à multiplici H; Aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamvis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diversas, ut ex defin. 8. fiet perspicuum.

Itaque ut demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in aliis servatur) quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuscunque æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere semper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus; ita ut nunquam contrarium ejus inveniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque necesse est, qualibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut excessus conditionem.

DEFINITIO. VII.

Eandem autem habentes rationem magnitudines; Proportionales vocentur.

UT si magnitudinum A, B, C, D, eadem sit proportio A, ad B, quæ C, ad D, dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio E, ad F, quæ F, ad G, dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales continuæ inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G: Quædam vero proportionales TAB. XVII. fig. 1, 2.

tionales sunt non continuæ, sed discretæ, cujusmodi sunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, ut dictum est in 4. definitione.

DEFINITIO. VIII.

Cum vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; At multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DEclarat hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ut majorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si sumpta sint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia secundæ & quartæ; deprehensumque fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ majus esse multiplice secundæ, multiplex autem tertiæ non esse majus multiplice quartæ, sed vel minus, vel æquale; dicetur major esse proportio primæ magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartam: ut perspicuum est in apposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, sumpta sunt triplicia E, & F; secundæ vero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ majus quidem est quam G, multiplex secundæ; At F, multiplex tertiæ majus non est quam H, multiplex quartæ, dicetur major esse proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam; quam C, tertiæ, ad D, quartam.

TAB. XVII. fig. 4.

Non est autem necesse, ut quatuor magnitudinum,

prima

prima ad secundam dicatur majorem habere proportionem quam tertia ad quartam, æque multiplicia secundum quamvis multiplicationem sic se habere, ut multiplex quidem primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; sed satis est, ut secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque interdum fieri, ut tam multiplex primæ majus sit multiplice secundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ. Item ut & multiplex primæ minus sit multiplice secundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex primæ superat quidem multiplex secundæ, at multiplex tertiæ vel minus est, vel æquale multiplici quartæ: propterea majorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam, non autem eandem.

Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est, ut æque multiplicia earum, juxta quasvis multiplicationes accepta, vel una deficiant, vel una æqualia sint, vel una excedant, ut in 6. def. fuit expositum: Ut autem majorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, ut secundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex vero tertiæ non superet multiplex quartæ quamvis juxta innumeras alias multiplicationes, æquè multiplicia primæ, ac tertiæ una excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ.

Quod si quando è contrario multiplex primæ deficiat à multiplice secundæ, non autem multiplex tertiæ à multiplici quartæ, dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam: quamvis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ una

deficiant ab æque multiplicibus secundæ, & quartæ.

DEFINITIO. IX.

Proportio autem in tribus terminis paucissime consistit.

QUoniam omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, ut dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, ut minimum, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, sive magnitudines. At vero si fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens terminus unius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunque solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

DEFINITIO. X.

Cum autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, uno amplius, quam diu proportio extiterit.

TAB. XVII. fig. 5.

VEluti si sint magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita ut ea sit proportio A,

A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D: & D, ad E: proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata ejus proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, ut propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, id est, bis ordine positam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata ejus proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C; & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id est, ter ordine positam: Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interjiciuntur inter A, & E, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, &c.

Quod si è contrario ea sit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; sic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

DEFINITIO. XI.

Homologæ, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

Definivit supra proportionalitatem, proportionum esse similitudinem. Docet jam, non solum in proportionalitate quavis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologasve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, ut intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quænam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quænam consequentia, ut in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D, dicetur quantitas A, similis quantitati C, & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, utramque magnitudinem antecedentem vel æqualem esse utrique consequenti, vel eodem modo majorem, aut minorem: Alias non haberet utraque antecedens ad utramque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes majores sunt eodem modo consequentibus. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, ubi tam E, & F, homologæ sunt, quam F, & G, ut constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. jussit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia æque multiplicia secundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum consequentium. Hæ enim similes sunt in mag-

TAB. XVII. fig. 6.

magnitudinibus proportionalibus, ut ex hac definitione constat: in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.

DEFINITIO. XII.

Alterna ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem hujus. Ut si ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumentari à permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione utuntur hoc fere modo loquendi: Ut est A, ad B, ita C, ad D; Igitur permntando, seu vicissim, erit quoque A, ad C, ut B, ad D. Firmam autem esse hujusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. libri hujus. Cæterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse ejusdem generis, ut inter binas ut ut assumptas proportio esse possit. TAB. XVII. fig. 7.

DEFINITIO. XIII.

Inversa ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

Ut si ex eo, quod est A, ad B, ut C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, ut D, ad C, TAB. XVII. fig. 7.

 hoc

hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inversa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Ut est A, ad B, ita C, ad D; Igitur convertendo, vel è contrario, erit quoque B, ad A, ut D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. hujus lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse unius generis, & posteriores alterius.

DEFINITIO. XIV.

Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsam consequentem.

TAB. XVII. fig. 8. *Sit proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius AC, nempe antecedentis cum consequente, ad BC, consequentem, quam habet tota DF, antecedens nimirum cum consequente, ad EF, consequentem; dicetur hujuscemodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud novum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione; Ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, componendo ergo erit & AC, ad BC, ut DF, ad EF. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.*

DEFINITIO. XV.

Divisio rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

TAB. XVII. fig. 9. *Ut si dicatur, quæ proportio est totius AB, ad CB, ea est totius DE, ad FE; Igitur erit & AC,*

AC, excessus, quo antecedens consequentem superat; ad CB, consequentem, ut DF, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad FE, consequentem. In divisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo dividendo, &c. Hac porro illatio ostendetur propos. 17. hujus lib.

DEFINITIO. XVI.

Conversio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

Quod si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, excessum, quo consequentem superat antecedens, ut DE, ad DF; Dicemur per conversionem rationis argumentari. Unde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conversionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. hujus lib. TAB. XVII. fig. 9.

DEFINITIO. XVII.

Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit.

Vel aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

Sint plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sintque bina ac bina in eadem proportione, hoc est, A, ad B, ut D, ad TAB. XVII. fig. 10.

E, & B, ad C, ut E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, primæ ad ultimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, primæ magnitudinis ad ultimam in secundis magnitudinibus; dicetur hujusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, sive ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis mediis, colliguntur habere unam, eandemque inter se proportionem, ut in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, uno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinate procedendo, altero vero, cum ordo invertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.

DEFINITIO. XVIII.

Ordinata proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam, ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

TAB. XVII. fig. 11. *UT quando fuerit A, ad B, ut D, ad E; Rursus ut B, consequens ad aliud quidpiam, ut ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quam in secundis servatur; cum utrobique conferatur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate servatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22. hujus lib. eam argumentationem esse bonam.*

DEFI-

DEFINITIO. XIX.

Perturbata autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & aliis, quæ ſint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI autem ſit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde ut in primis magnitudinibus B, conſequens ad C, aliud quidpiam, ita in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad E, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur hujuſcemodi proportio, Perturbata: quod non ſervetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum ſecunda, at in ſecundis ſecunda cum tertia; deinde in primis ſecunda cum tertia, at in ſecundis prima cum ſecunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate ſervatur Perturbata proportio, demonſtratur eam argumentationem eſſe bonam, propoſ. 23. hujus lib. TAB. XVIII. fig. 1.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æque multiplices; quam multiplex eſt unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SInt quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico TAB. XVIII. fig. 2.

Dico magnitudines AB, CD, ſimul, tam eſſe multiplices magnitudinum E, F, ſimul, quam eſt multiplex AB, ipſius E, vel CD, ipſius F. Cum enim AB, CD, ſint æque multiplices ipſarum E, & F, ſi AB, dividatur in magnitudines AG, GH, HB, ipſi E, æquales, & CD, quoque in magnitudines CI, IK, KD, ipſi F, æquales; (Dividi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, CD, ſint ipſarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfecte contineatur, quoties F, in CD, ut ex iis, quæ in defin. 2. hujus lib. ſcripſimus, conſtat) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot ſunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam vero AG, & E, æquales inter ſe ſunt,
a 2. pron. ſi ipſis addantur æquales CI, & F, *a* erunt AG, CI, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul. Eodem modo erunt GH, & IK, ſimul æquales ipſis E, & F, ſimul; Nec non HB, & KD, eiſdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, ſimul, in AB, CD, ſimul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex eſt AB, ipſius E, tam ſunt multiplices AB, CD, ſimul, ipſarum E, & F, ſimul, ut conſtat ex iis, quæ in defin. 2. lib. hujus ſcripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonſtrandum.

ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si prima ſecundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ, erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

TAB. XVIII. fig. 3. SIt magnitudo prima AB, tam multiplex ſecundæ C, quam eſt multiplex DE, tertia, quartæ

TAB. XVII.

E

F

G

Fig. 2.

Fig. 3.

C

D

F

H

Fig. 4.

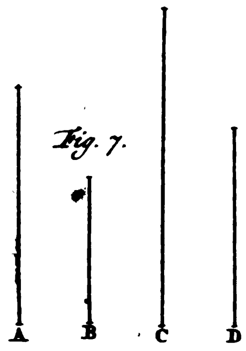
C

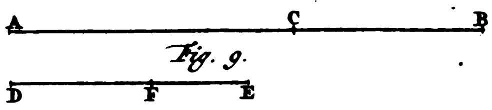
D

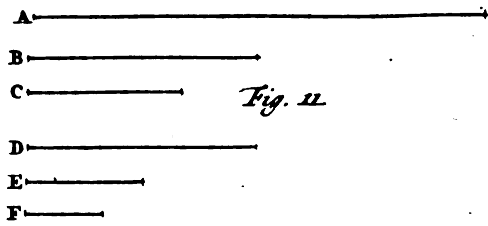
F

H

Fig. 6.







tæ F; Rursus tam sit multiplex BG, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est EH, sexta ipsius F, quartæ. Dico AB, primam cum BG, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quam multiplex est, DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius F, quartæ. Cum enim AB, & DE, sint æque multiplices ipsarum C, F, erunt in AB, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in DE, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in BG, tot æquales ipsi C, quot sunt in EH, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus AB, DE, addantur æquales multitudines BG, EH, erunt totæ multitudines AG, DH, æquales. Quare toties comprehenditur C, in AG, quoties F, in DH: Ideoque tam multiplex est AG, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quam multiplex est DH, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

Si sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, sumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

Sit prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, ut in EG, GH, HI, & FK, KL, LM, erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in

TAB. XVIII. fig. 4.

in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG, FK, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL. Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex FK, tertia quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex est ejusdem secundæ B, quam multiplex est KL, sexta ejusdem quartæ D, *a* Erit & EH, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est multiplex FL, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cum sit EH, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex est FL, tertia quartæ D, ut proxime demonstratum est; sit autem & HI, quinta tam multiplex secundæ B, quam est LM, sexta multiplex quartæ D; *b* Erit & EI, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est FM, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod ostendendum erat.

a 2. *quint.*
b 2. *quint.*

iv. THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

TAB. XVIII. fig. 5.

Sit proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, juxta quamvis multipli-

triplicationem: sive E, F, ita multiplices sint ipsarum A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, sive non. His positis constat ex defin. 6. hujus lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H; Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H: Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æque multiplicia non semper ita se haberent. Dico jam, multiplicia primæ ac tertiæ non solum una deficere à multiplicibus secundæ ac quartæ, aut una æqualia esse, aut una excedere, ut diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, ut F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda; F, tertia, & H, quarta; sumanturque ipsarum E, F, æque multiplicia qualiacunque; Item ipsarum G, H, quæcunque etiam æque multiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere, ut vult definitio 6. Idem namque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æque multiplicia sumpta diximus, vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ; *b* Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam, ostensæque sunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ A, C. Item L, M, æque multiplices secundæ & quartæ B, D, *c* fit ut si I, multiplex primæ

b 3. *quint.*

c 6. *def. quinti.*

primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis: & denique si I, excedit ipsum L, etiam K, excedat necessario ipsum M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æque multiplicia, quæcunque sint, d æque multiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque esse, quam M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione; e Erit, ut E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

d 3. quint.

e 6. def. quinti.

COROLLARIUM.

Hinc facile demonstrabitur inversa ratio, quam Euclides defin. 13. explicavit; hoc est si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contra, seu inversa ratione proportionales esse. Sit enim A, ad B, ut C, ad D. Dico esse convertendo, ut B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æque multiplicibus ipsarum A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æque multiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet, ut C, tertia ad D, quartam, f necessario sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel major, etiam F, multiplicem tertiæ minorem esse, vel æqualem vel majorem, quam H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, major fuerit quam E, vel æqualis, vel minor, etiam H, majorem fore, vel æqualem, vel minorem, quam F, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si utraque E, F, minor est, quam utraque G, H, erit contra utraque G, H, major quam utraque E, F, & si utraque

TAB. XVIII. fig. 6.

f 6. def. quinti.

utraque E, F, æqualis est utrique G, H, erit è contrario, utraque G, H, utrique E, F, quoque æqualis: Et denique si utraque E, F, major est, quam utraque G, H, erit vice versâ, utraque G, H, minor, quam utraque E, F. Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D, sumpta sunt, æque multiplicia G, H; Item secundæ A, & quartæ C, æque multiplicia E, F, ostensumque est, G, H, vel una excedere E, F, vel una æqualia esse vel una deficere, secundum quamcumque multiplicationem ea multiplicia sumantur; *g* erit ut B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum. *g 6. def. quinti.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ; Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.

ITa multiplex sit tota AB, totius CD, ut est multiplex AE, ablata ablatæ CF, sive AE, CF, ablatæ sint totis AB, CD, commensurabiles, ut in 7ma figura, sive incommensurabiles, ut in 8va figura. Item sive AE, CF, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, ut in 7ma figura, sive non ex eisdem, ut in 8va figura. Dico reliquam EB, ita esse multiplicem reliquæ FD, ut est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cujuspiam magnitudinis, videlicet ipsius GC, ut est AE, multiplex ipsius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; *a* erit tota AB, totius GF, ita multiplex, ut AE, ipsius CF, hoc est omnes omnium, ut una unius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipsius CD, quam est multiplex AE, ipsius CF. Igitur AB, tam est multiplex ipsius GF, quam multiplex est ipsius CD; *b* atque idcirco æquales sunt GF, CD. Ablata igitur communi CF, æquales erunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quam multiplex

TAB. XVIII. fig. 7, 8.

a 1. quint.

b 6. pron.

tiplex eſt ipſius GC. Sed ita multiplex poſita fuit EB, ipſius GC, ut AE, ipſius CF, hoc eſt, ut tota AB, totius CD. Quare tam multiplex eſt reliqua EB, reliquæ FD, quam eſt tota AB, totius CD, quod eſt propoſitum.

TAB. XVIII. fig. 9, 10. Aliter. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, ut ablata AE, ablatæ CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, eſſe ſic multiplicem, ut eſt tota totius. Poſita enim GA, ita multiplici ipſius FD, ut eſt AE, ipſius CF, vel ut tota AB, totius CD, quoniam AE, GA, æque multiplices ſunt ipſarum CF, FD; c erit tota GE, ſic multiplex totius CD, ut AE, ipſius CF: Sed ita quoque multiplex eſt AB, ejuſdem CD, ut AE, ipſius CF, ex hypotheſi. Æque multiplices ſunt igitur GE, AB, ipſius CD; d atque adeo inter ſe æquales. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB, Ideoque æque multiplices ipſius FD; cum GA, ſit multiplex poſita ipſius FD: Atqui ita eſt multiplex poſita GA, ipſius FD, ut AB, ipſius CD. Igitur & EB, reliqua ſic erit multiplex ipſius FD, reliquæ ut AB, tota totius CD; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 1. quint.

d 6. pron.

vi. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

TAB. XVIII. fig. 11. Sint magnitudines AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG,

AG, ejusdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipsi E, vel ejus multiplex; alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipsi E. Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim, CI, æqualis ipsi F. Et quia prima AG, tam est multiplex secundæ E, quam CH, tertia multiplex est quartæ F; & quinta GB, æqualis est secundæ E, sicut & CI, sexta æqualis est quartæ F; *a* erit AB, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, ut HI, tertia cum sexta, multiplex est quartæ F: Atqui CD, ipsius F, erat quoque tam multiplex, quam AB, multiplex est ipsius E. Æque multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F. *b* Ideoque æquales inter se. Quare dempta CH, communi remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod est propositum.

a 2. quint.

b 6. pron.

Sit deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse multiplicem HD, ipsius F. Posita namque CI; ita multiplici ipsius F, ut est multiplex GB, ipsius E; *c* erit ut prius AB, ita multiplex ipsius E, ut HI, multiplex est ipsius F. *d* Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, est ita multiplex ipsius F, ut GB, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, multiplex est, quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

TAB. XVIII. fig. 12.

c 2. quint.

d 6. pron.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

Sint duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quævis C. Dico A, & B; habere

TAB. XIX. fig. 1.

bere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipsarum æqualium A, B; *a* eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, utcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sunt, fit ut utraque vel minor sit, quam F, vel æqualis, vel major, juxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ minores sint ipsa F, multiplice secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel majores; *b* erit ea proportio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.

a 6. pron.

b 6. def. quinti.

Eodem pacto ostendemus F, vel minorem esse utraque D, E, vel utrique æqualem, vel majorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, una deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartæ B, vel una æqualis sit, vel major; *c* Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset brevius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inversa ratione. Cum enim ostensum jam sit, esse A, ad C, ut B, ad C, erit convertendo C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. Quod erat demonstrandum.

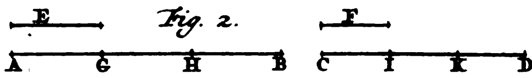
c 6. def. quinti.

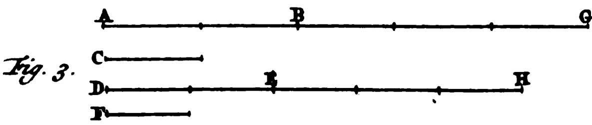
SCHOLIUM.

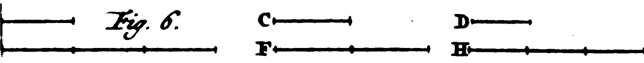
Eodem fere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omisit, utitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ sequuntur, perinde ac si in hac propos. 7. esset demonstratum. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quam C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipsarum

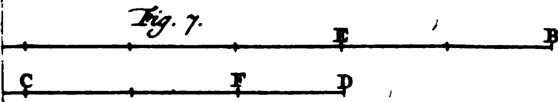
TAB XIX. fig. 2.

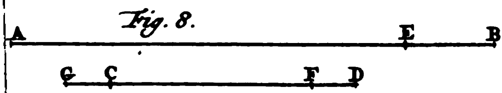
TAB. XVIII.


E
Fig. 2.
F
A
G
H
B
C
I
K
D

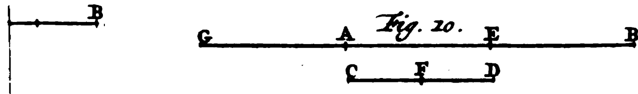

A
B
G
Fig. 3.
C
D
E
H
F

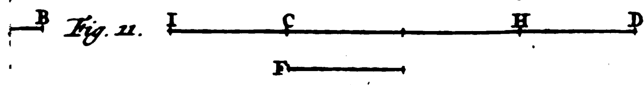

Fig. 6.
C
D
F
H

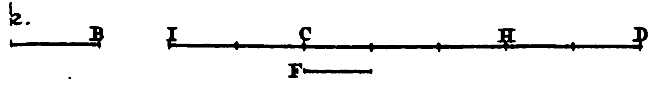

Fig. 7.
E
B
C
F
D


Fig. 8.
A
E
B
G
C
F
D


C
D
F
H
K
M


B
Fig. 10.
G
A
E
B
C
F
D


B
Fig. 11.
I
C
H
D
F


2.
B
I
C
H
D
F

ipsarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipsarum C, & D, secundæ & quartæ; d *erunt tam E, & F, inter se* d 6. *quin.* *æquales, quam G, & H, inter se. Quare si E, multiplex primæ deficit à G, multiplice secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit.* e *Eadem ergo est proportio A, primæ ad* e 6. *def.* *C, secundam; quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod* *quinti.* *est propositum.*

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, majorem rationem habet, quam ad majorem.

SInt magnitudines inæquales, AB, major & *TAB.XIX.* C, minor, tertia autem quælibet D. Dico *fig.* 3, 4. proportionem AB, ad D, majorem esse proportione C, ad D. At è converso, majorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad AB. Intelligatur enim in AB, magnitudine majore, magnitudo AE, æqualis minori C, ut sit reliqua EB. Utraque deinde EB, AE, æqualiter multiplicetur, hac lege, ut GF, multiplex ipsius EB, major quidem sit, quam D; At HG, multiplex ipsius AE, non sit minor eadem D, sed vel major, vel æqualis. In 3tia figura necesse fuit sumere GF, HG, triplas ipsarum EB, AE; quia dupla ipsius AE, esset minor, quam D. Loco triplarum potuissent accipi quæcunque aliæ æque multiplices majores. In 4ta autem figura satis est, sumere ipsarum EB, AE, duplas GF, HG; quia utraque GF, HG, major est, quam D. Possent tamen pro duplis sumi quæcunque aliæ majores æque multiplices. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices sunt duarum BE, EA; *a* erit & tota FH, ita multiplex totius AB, a 1. *quinti.*

ut GH, ipſius AE, hoc eſt, ipſius C, cum æquales ſint poſitæ, C, & AE. Capiatur quoque ipſius D, multiplex IK, quæ proxime major ſit, quam HG, nempe dupla, ut in 3tia figura. Quod ſi dupla major non fuerit quam HG, ſumatur tripla, vel quadrupla, &c. In 4ta figura accepta eſt IK, ipſius D, quadrupla, quia tam dupla quam tripla minor eſt, quam HG, at quadrupla jam major eſt. Abſciſſa ergo LK, quæ æqualis ſit ipſi D, non erit IL, major quam HG, (alias IK, non eſſet multiplex ipſius D, proxime major quam HG; ſed & IL, major quoque eſſet quam GH. Quod ſi IK, dupla ſit ipſius D, perſpicuum eſt, IL, non eſſe majorem, quam HG, cum HG, poſita ſit non minor quam D, hoc eſt quam IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis ipſi IL, vel major. Et quia FG, major eſt poſita quam D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoque FG, major quam LK. Cum ergo HG, non minor ſit quam IL, ut demonſtratum eſt, ſed vel æqualis, vel major; erit tota FH, major quam IK. Itaque cum FH, HG, ſint æque multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipſius D, quæ inſtar eſt ſecundæ & quartæ: ſit autem FH, multiplex primæ, major quam IK, multiplex ſecundæ; At HG, multiplex tertiæ, non ſit major, quam IK, multiplex quartæ, immo minor, ex hypotheſi; (ſumpta enim eſt IK, multiplex ipſius D, major quam HG,) *b* erit major proportio AB, primæ ad D, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

b 8. *def. quinti.*

Quoniam vero è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda & AB, quarta) major eſt quam HG, multiplex ſecundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, major non eſt, quam FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, major ſit, quam IK, ut oſtenſum eſt; *c* erit major proportio D, primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod eſt propoſitum. Inæqualium

c 8. *def. quinti.*

qualium igitur magnitudinum major ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix.

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

HAbeant primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, major & B, minor. *a* Erit igitur major proportio A, majoris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. *TAB. XIX fig. 5.* a 8. *quint.*

Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset major, & B, minor; *b* haberet C, ad B, minorem, majorem proportionem, quam ad A, majorem: quod est contra hypothesin. Non igitur major erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat. b 8. *quint.*

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est: Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor est.

HAbeat primum A, ad C, majorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, majorem esse, quam B: Si enim A, foret ipsi B, æqualis, *a* haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quam B, *b* haberet B, major ad C, proportionem majorem, *TAB. XIX fig. 6.* a 7. *quint.* b 8. *quint.*

jorem, quam A, minor ad eandem C, quod est contra hypothesin. Non est igitur A, æqualis vel minor quam B, sed major.

Habeat secundo C, ad B, majorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse quam A. Non
c 7. quint. enim æqualis erit B, ipsi A; c alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque vero B, major erit quam A,
d 8. quint. d alias haberet C, ad minorem A, majorem proportionem quam ad B, majorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quam A, quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

xj. THEOR. 11. PROPOS. 11.

Quæ eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

TAB. XIX. fig. 7. Sint proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se, secundum definitionem 6. hoc est sumptis æque multiplicibus ipsarum A, C; Item æque multiplicibus ipsarum B, D; semper contingere, ut multiplices ipsarum A, C, à multiplicibus ipsarum B, D, vel una deficiant, vel una æquales sint, vel una excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam ut E, tertia ad F, quartam;
a 6 def quinti. a fit ut si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel major, æqualis quoque sit I,
b 6. def. quinti. ipsi M, vel major: b Sed (ut eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel æqualis, vel

vel major est quoque H, minor quam L, vel æqualis, vel major; propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et si G, æqualis est, vel major quam K, etiam H, æqualis erit, vel major quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque aliis æque multiplicibus. *c* Quapropter erit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum. c *6. def. quinti.*

THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

Si sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QUod in propos. 1. de proportione multiplici demonstravit, ostendit hic de omni genere proportionis etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B, C, D, E, F, proportionales hoc est, sit A, ad B, ut C, ad D, & E, ad F. Dico ut est una antecedentium ad unam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, *a* erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, ut una unius, nempe ut G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, ut una unius, nimirum ut K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut alia E, tertia ad *TAB. XIX. fig. 8.* a *1. quint.*

b 6. def. quinti. aliam F, quartam; *b* fit ut si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M: Et si G, æqualis est ipsi K, vel major, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel major. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel major quam K, & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores sint, c 6. def. quinti. vel æquales vel majores. *c* Quocirca ut est A, prima ad B, secundam ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

xiij. THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam majorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

TAB. XIX. fig. 9. SIt prima A, ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam major, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse majorem quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æque multiplicibus ipsarum A, E; Item æque multiplicibus ipsarum B, F, contingere posse, ut multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, a 6. def. quinti. quartam; *a* fit ut si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartæ, &c.

&c. At quando H, excedit ipſam L, *b* non neceſſario I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, vel minor; quod major ponatur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam E, tertiæ F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, excedit M. *c* Major eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quamobrem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat. b 8. *def. quinti.* c 8. *def. quinti.*

THEOR. 14. PROPOS. 14. xiv.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima vero quam tertia major fuerit, erit & ſecunda major quam quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ; erit & ſecunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

Sit enim A, prima ad B, ſecundam ut C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, major fuerit quam C, fore quoque B, majorem quam D. Quod ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoque eſſe B, ipſi D: Si denique A, minor fuerit quam C, minorem quoque eſſe B, ipſa D. Sit primum A, major quam C, *a* eritque propterea proportio A, majoris ad B, major quam C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam ut A, tertia ad B, quartam, proportio autem A, tertiæ ad B, quartam major eſt, ut oſtendimus, quam C, quintæ ad B, ſextam: *b* Major quoque erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam C, quintæ ad B, ſextam. *c* Minor eſt ergo D, quam B; Ideoque B, major erit quam D. Quod eſt propoſitum. *TAB. XIX fig. 10, 11, 12.* *fig. 10.* a 8. *quint.* b 13. *quint.* c 10. *quint.*

Sit deinde A, æqualis ipſi C; *d* eritque idcirco A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, *e* erunt quoque inter ſe eædem *fig. 11.* d 7. *quint.* e 11. *quint.*

N 5 pro-

f 9. quint. proportiones C, ad D, & C, ad B; *f* Ideoque æquales erunt B, & D. Quod est propositum.

fig. 12. Sit tertio A, minor quam C, *g* eritque ob g 8. quint. hoc major proportio C, majoris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam: b 13. quint. *b* Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam; i 10. quint. *i* Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

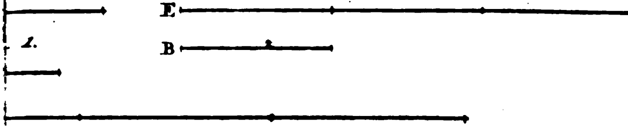
XV. THEOR. 15. PROPOS. 15.

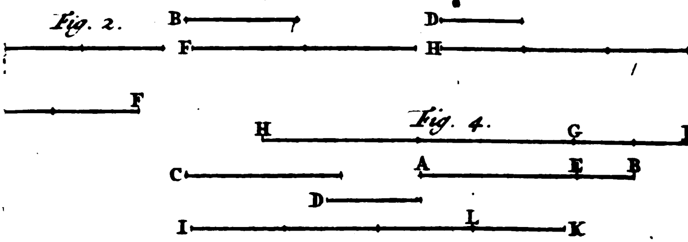
Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

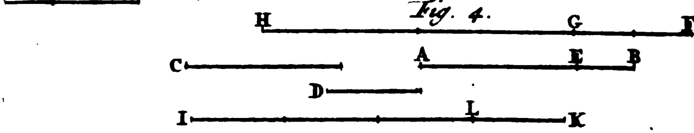
TAB. XX. fig. 1. SInt partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, ut A, ad B. Cum enim CD, & EF, sint æque multiplices ipsarum A, & B, continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Dividatur ergo CD, in partes CG, GH, HD, æquales ipsi A, & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B, a 7. quint. *a* eritque CG, ad EI, ut A, ad B, quod CG, & A, æquales inter se sint, nec non EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK, & HD, ad b 11. quint. KF, ut A, ad B, *b* ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca ut CG, ad EI, hoc est, ut A, ad B, c 12. quint. *c* ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul ad omnes EI, IK, KF, simul, quod est propositum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

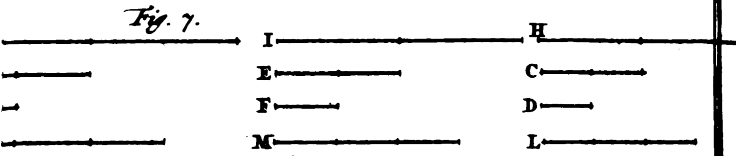
THEOR.

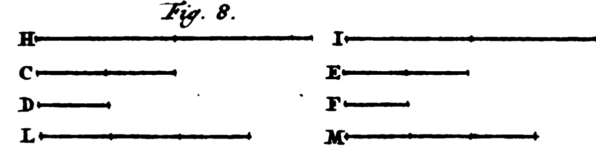
TAB. XIX.

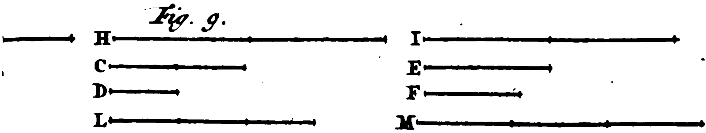

1.
E
B

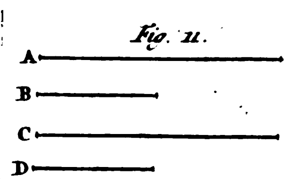

Fig. 2.
B
D
F
H
F

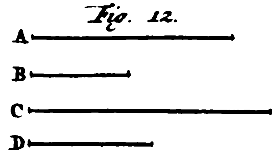

Fig. 4.
H
G
F
A
E
B
C
D
I
L
K


Fig. 7.
I
H
E
C
F
D
M
L


Fig. 8.
H
I
C
E
D
F
L
M


Fig. 9.
H
I
C
E
D
F
L
M


Fig. 11.
A
B
C
D


Fig. 12.
A
B
C
D

THEOR. 16. PROPOS. 16. XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

Hic demonſtratur alterna, ſive permutata proportio, ſeu ratio, quæ defin. 12. explicata eſt. Sit enim A, ad B, ut C, ad D. Dico viciſſim, ſeu permutando, eſſe quoque A, ad C, ut B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, primæ ac ſecundæ, æque multiplices E, F. Item ipſarum C, D, tertiæ & quartæ æque multiplices G, H; *a* eritque E, ad F, ut A, ad B, cum E, & F, ſint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, ut C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, ſint eædem proportioni A, ad B; erunt & ipſæ *b* inter ſe eædem. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D; *c* erunt & ipſæ eædem inter ſe; hoc eſt, ut eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. *d* Quare ſi E, prima major eſt quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, ſecunda major quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplicatione accepta ſint æque multiplicia E, F, & æque multiplicia G, H. *e* Eſt igitur A, prima ad C, ſecundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, ſint æque multiplices primæ A, ac tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, ſecundæ & D, quartæ, & illæ ab his una deficiant, vel una æquales ſint, vel una excedant, &c.) quod eſt propoſitum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat.

TAB. XX. fig. 2.

a 15. *quint.*

b 11. *quint.*

c 11. *quint.*

d 14. *quint.*

e 6. *def. quinti.*

THEOR.

xvij. THEOR. 17. PROPOS. 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque divisæ proportionales erunt.

TAB.XX. fig. 3. HOc loco demonstrat Euclides Divisionem rationis, quam defin. 15. explicavit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, EF, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, ut DE, ad EF. Dico & divisas easdem proportionales esse, hoc est, ut est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH,
a 1. *quint.* HI, KL, LM; *a* eritque GI, ita multiplex ipsius AB, ut est GH, ipsius AC, hoc est, ut KL,
b 1. *quint.* ipsius DF, *b* ita quoque multiplex est KM, ipsius DE. Æque multiplices ergo sunt GI, KM, ipsarum AB, DE. Capiantur rursus IN, MO, æque multiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, ut LM, tertia quartæ FE: Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex
c 2. *quint.* est MO, sexta quartæ FE; *c* erit & HN, sic multiplex secundæ CB, ut LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cum sit AB, prima ad CB, secundam, ut DE, tertia ad FE, quartam; sumptæque sint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ AB, DE: Item secundæ & quartæ
d 6. *def. quinti.* CB, FE, æque multiplices HN, LO, *d* fit ut si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GI, ab HN, quam KM, ab LO, ablatis communibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO, ablatis com-

communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & KM, ipsam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob rem cum GH, KL, sumptæ sint æque multiplices primæ AC, & tertiæ DF: Item IN, MO, æque multiplices secundæ CB, & quartæ FE, ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illæ æque multiplices fuerint acceptæ) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ vel una deficere, vel una æquales esse, vel una excedere; *e* Erit AC, prima ad CB, secundam, ut DF, tertia ad FE, quartam, quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat. *e 6. def. quint.*

THEOR. 18. PROPOS. 18. xviij.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEmonstrat hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim divisæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc est, AB, ad BC, ut DE, ad EF. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, ut est AC, ad BC, ita esse DF, ad EF. Si enim non est, ut AC, ad BC, ita DF, ad EF, habebit DF, ad aliquam magnitudinem minorem ipsa EF, vel majorem, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipsa EF, si fieri potest, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est, ut AC, ad BC, ita DF, ad GF; *a* Erit dividendo quoque, ut AB, ad BC, ita DG, ad GF: Sed ut AB, ad BC, ita proposita quoque est DE, ad EF. *b* Igitur erit etiam, ut DG, prima ad GF, secundam, ita DE, tertia ad

TAB. XX. fig. 4.

a 17. quint.

b 11. quint.

ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima major
c 14. quint. sit, quam DE, tertia, *c* erit quoque GF, secunda major quam EF, quarta, pars quam totum. Quod est absurdum.

Habeat deinde, si fieri potest, DF, ad HF, majorem ipsa EF, eandem proportionem, quam AC, ad BC. Quoniam igitur est, ut AC, ad
d 17. quint. BC, ita DF, ad HF; *d* erit dividendo quoque ut AB, ad BC, ita DH, ad HF. Sed ut AB, ad BC,
e 11. quint. ita posita etiam est DE, ad EF. *e* Igitur erit quoque, ut DH, prima ad HF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, prima minor sit quam DE tertia, eritque HF, secunda minor quam EF, quarta, totum quam pars, quod est absurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipsa EF, aut ad majorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo DF, ad ipsam EF, erit, ut AC, ad BC, quod est propositum. Itaque si divisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

xix. THEOR. 19. PROPOS. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum, ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

TAB. XX. fig. 5. QUod in propos. 5. demonstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Si enim tota AB, ad totam CD, ut ablata AE, ad ablatam CF. Dico & reliquam EB, esse ad reliquam FD, ut est tota AB, ad totam CD. Cum
a 16. quint. enim sit AB, ad CD, ut AE, ad CF, *a* erit &
b 17. quint. permutando AB, ad AE, ut CD, ad CF. *b* Dividendo ergo erit EB, ad AE, ut FD, ad CF,
c 16. quint. *c* Quare permutando rursus erit EB, ad FD, ut AE, ad CF, hoc est, ut tota AB, ad totam CD, cum posita sit AB, ad CD, ut AE, ad CF.

Si

Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Hinc facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conversione rationis, juxta 16. defin.

Sit enim, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conversionem rationis esse quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE, *d* erit quoque dividendo, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & convertendo, ut CB, ad AC, ita FE, ad DF, *e* ac propterea componendo quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum. *TAB. XX. fig. 6.* d17. *quint.* e18. *quint.*

THEOR. 20. PROPOS. 20. XX.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero; quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia major fuerit, erit & quarta quam sexta, major. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SInt tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F, sit autem primum A, prima major quam C, tertia. Dico & D, quartam esse majorem F, sexta. Cum enim A, major sit quam C, *a* erit major proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem ut A, ad B, ita D, ad E. *b* Major igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At ut C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, ut E, ad F, erit convertendo ut C, ad B, ita F, *TAB. XX. fig. 7.* a 8. *quint.* b13. *quint.*

F, ad E.) Major igitur quoque proportio erit
c10. quint. D, ad E, quam F, ad E, c quare D, major erit, quam F. Quod est propositum.
TAB XX. fig. 8. Sit deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C.,
d 7. quint. æqualis d erit A, ad B, ut C, ad B. Est autem
e 11. quint. ut A, ad B, ita D, ad E. e Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B: At ut C, ad B, ita est F, ad E, per inversam rationem, uti prius. Quare
f 9. quint. erit quoque D, ad E, ut F, ad E: f Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.
TAB. XX. fig. 9. Sit tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit
g 8. quint. quam C, g erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed ut A, ad B, ita est D, ad E.
h 13. quint. h Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quam C, ad B. Est autem convertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E,
i 10. quint. i proptereaque D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendendum.

xxi. THEOR. 21. PROPOS. 21.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia major fuerit: erit & quarta, quam sexta, major. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor; hæc quoque minor erit.

TAB XX. fig. 10. Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, primo major quam C, tertia. Dico & D, quartam esse majo-

majorem sexta, F. Cum enim A, major sit quam C, *a* erit major proportio A, ad B, quam C, ad B: Est autem ut A, ad B, ita E, ad F. *b* Major ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero ut B, ad C, ita est D, ad E, erit convertendo ut C, ad B, ita E, ad D. Quare major quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. *c* Ideoque major erit D, quam F. Quod est propositum.

a 8. quint.
b 13. quint.
c 10. quint.

Sit deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, *d* erit A, ad B, ut C, ad B: Sed ut A, ad B, ita est E, ad F. *e* Igitur erit ut C, ad B, ita E, ad F: Est autem ex inversa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque ut E, ad F, ita E, ad D; *f* atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

TAB. XX. fig. 11.
d 7. quint.
e 11. quint.
f 9. quint.

Sit tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, *g* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Ut autem A, ad B, ita est E, ad F. *h* Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, ut ante, ex inversa ratione, est ut C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; *i* ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.

TAB. XX. fig. 12.
g 8. quint.
h 13. quint.
i 10. quint.

THEOR. 22. PROPOS. 22. xxij.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

JAm hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando

proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: sitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, ut D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æque multiplicibus G, H: Item ipsarum B, E, æque multiplicibus I, K: Item ipsarum C, F, æque multiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, ut D, tertia ad E, quartam, a erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, ut H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secundam, ut E, tertia ad F, quartam; b erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, ut K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; c fit ut si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant una ab L, M, æque multiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel una æquales sint, vel una excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia: d erit A, prima ad C, secundam, ut D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

TAB. XXI fig. 1.

a 4. quint.

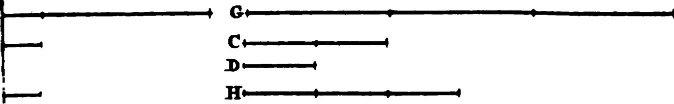
b 4. quint.

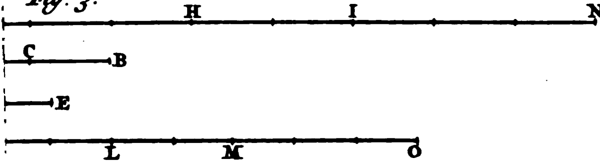
c 20. quint.

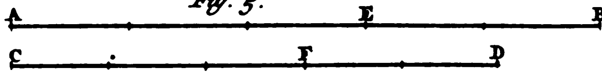
d 6. def. quinti.

Deinde sint plures magnitudines tribus, ita ut sit etiam C, ad N, ut F, ad O. Dico adhuc esse ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim jam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, ut D, ad F: ponatur autem C, ad N, ut F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit per tres; Et sic de pluri-

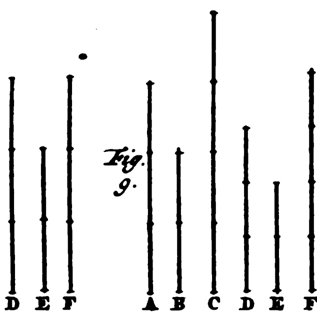
TAB. XX.

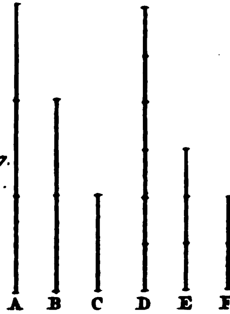

Fig. 2.
G
C
D
H

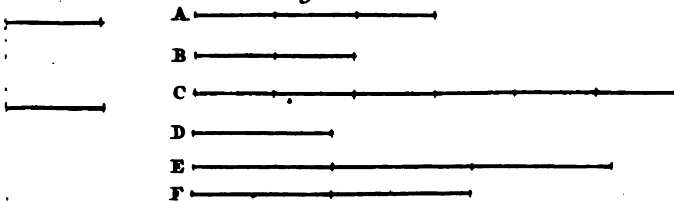

Fig. 3.
H
I
N
C
B
E
L
M
O


Fig. 5.
A
E
B
C
F
D


B
F
E


Fig. 9.
D E F
A B


C D E F
Fig. 10.
A B C D E F


Fig. 12.
A
B
C
D
E
F

pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 23. xxiij.

Si sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonstratur hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit ut A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse ut A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æque multiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, æque multiplicibus K, L, M. *a* Erit ut A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A, B, æque multiplices: At ut A, ad B, ita est E, ad F; *b* Igitur ut G, ad H, ita quoque est E, ad F; *c* Sed ut E, ad F, ita est quoque L, ad M, quod L, M, sint ipsarum E, F, æque multiplices. *d* Igitur erit quoque ut G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, ut D, tertia ad E, quartam; *e* erit quoque ut H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione sumantur, estque earum proportio perturbata; cum ostensum sit esse ut G, ad H, ita L, ad M: Et ut H, ad K, ita I, ad L; *f* fit ut si G, prima superat tertiam K, superet quoque quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis, & si deficit deficiat. Itaque cum G, & I, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æque

TAB. XXI fig. 2.

a 15. quint.
b 11. quint.
c 15. quint.
d 11. quint.
e 4. quint.
f 21. quint.

multiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel una deficiant, vel una æquales sint, vel una excedant; g erit ut A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam, quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

g 6. def. quinti.

xxiv. THEOR. 24. PROPOS. 24.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QUod propositione 2. demonstravit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, ut DE, tertia, ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, secundam, ut EH, sexta ad F, quartam. Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, ut est DH, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit ut BG, ad C, ita EH, ad F, erit convertendo ut C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, ut DE, ad F, & C, ad BG, ut F, ad EH, a erit ex æqualitate AB, ad BG, ut DE, ad EH. b Componendo igitur erit ut tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, ut DH, ad EH, & BG, ad C, ut EH, ad F: c erit ex æqualitate AG, ad C, ut DH, ad F. Quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

TAB. XXI. fig. 3.
a 22. quint.
b 18. quint.
c 22. quint.

THEOR.

THEOR. 25. PROPOS. 25. XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus majores erunt.

SIt enim AB, ad CD, ut E, ad F, sitque AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse majores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, ut E, ad F, hoc est, ut AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, ut ablata AG, ad ablatam CH: *a* erit quoque ut tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) major, quam CD. Igitur & GB, major erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E, fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul majores quam E, & CD, simul, cum GB, sit major quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

TAB. XXI. fig. 4.

a 19. quint.

SCHOLIUM.

Hic finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alii adjiciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpenumero gravissimi Scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Joannes Regiomontanus, & alii utuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, brevitate demonstrare, nec non in numerum, ac seriem propositionum

tionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc est.

xxvi. [THEOR. 26. PROPOS. 26.

Si prima ad secundam habuerit majorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit convertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

TAB.XXI. fig. 5. Habeat enim A, ad B, majorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, ut C, ad D; eritque proportio A, ad B, major quoque quam E, ad B; *a* ac propterea A, major erit quam E. *b* Quare minor erit proportio B, ad A, majorem, quam B, ad E, minorem: Sed ut est B, ad E, ita est convertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod est propositum.]

a 10. quint.
b 8. quint.

xxvij. [THEOR. 27. PROPOS. 27.

Si prima ad secundam habuerit majorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam majorem proportionem; quam secunda ad quartam.

TAB.XXI. fig. 5. Habeat enim A, ad B, majorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando majorem esse quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, ut C, ad D; eritque proportio A, ad B, major etiam quam E, ad B: *a* Ideoque A, major erit quam E. *b* Quare major erit proportio

a 10. quint.
b 8. quint.

A,

A, ad C, quam E, ad C. c Quoniam vero permutando eſt, ut E, ad C, ita B, ad D, (cum poſita ſit E, ad B, ut C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, major quoque erit quam B, ad D. Quod eſt propoſitum.] c 16 quint.

[THEOR. 28. PROPOS. 28. xxviij.

Si prima ad ſecundam habuerit majorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam majorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam.

Sit major proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo majorem eſſe proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim eſſe GB, ad BC, ut DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, major quoque, quam GB, ad BC; a Ideoque AB, major quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, major quam GC; b majorque propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, c ut eſt GC, ad BC, ita eſt DF, ad EF, (quod poſita ſit GB, ad BC, ut DE, ad EF.) Major ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.]

TAB XXI. fig. 6. — a 10 quint. — b 8. quint. — c 18. quint.

[THEOR. 29. PROPOS. 29. xxix.

Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam majorem habuerit proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque dividendo prima ad ſecundam majorem proportionem, quam tertia ad quartam.

Sit major proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & dividendo majorem eſſe pro- TAB XXI. fig. 6.

portionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, ut DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, major quoque proportione GC, ad BC: *a* ideoque major erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC; major erit AB, quam GB; *b* Ac propterea major erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC. *c* Sed dividendo, ut est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, ut DF, ad EF.) Igitur major quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.]

a 10. *quint.* b 8. *quint.* c 17. *quint.*

XXX. [THEOR. 30. PROPOS. 30.

Si composita prima cum secunda, ad secundam habuerit majorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conversionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

TAB. XXI. fig. 7.

SIt major proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conversionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, major proportio, quam DF, ad EF; *a* erit & dividendo, major proportio AB. ad BC, quam DE, ad EF. *b* Quare convertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE; *c* Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod est propositum.]

a 29. *quint.* b 26. *quint.* c 28. *quint.*

THEOR.

[THEOR. 31. PROPOS. 31. xxxi.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque major proportio primæ primorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam major, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate major proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

SInt tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque major proportio A, ad B, quam D, ad E: Item major B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate majorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut E, ad F, eritque propterea proportio B, ad C, major, quam G, ad C; *a* Ideoque B, major erit quam G. Quare *b* major erit proportio A, ad G, minorem quam A, ad B, majorem: Ponitur autem proportio A, ad B, major quam D, ad E. Multo ergo major erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, ut D, ad E; eritque propterea major proportio A, ad G, quam H, ad G; *c* Ideoque A, major erit, quam H. *d* Quare major quantitas A, ad C, habebit majorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C: *e* Atqui ut H, ad C, ita est, ex æqualitate D, ad F. (quoniam ut D, ad E, ita est H, ad G; & ut E, ad F, ita G, ad C.) Major ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.]

TAB. XXI. fig. 8.
a 10. quint.
b 8. quint.
c 10. quint.
d 8. quint.
e 22. quint.

xxxij. [THEOR. 32. PROPOS. 32.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque major proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam major, quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, major proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.

TAB.XXI. fig. 9. SInt tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitque major proportio A, ad B, quam E, ad F. Item major B, ad C, quam D, ad E. Dico eſſe quoque majorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C, ut D, ad E, eritque propterea proportio B, ad C, major
a 10. *quint.* quam G, ad C. *a* Ideoque major erit B, quam
b 8. *quint.* G. *b* Quare major erit proportio A, ad G, minorem, quam ejuſdem A, ad B, majorem; Eſt autem proportio A, ad B, major quam E, ad F. Multo ergo major eſt proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rurſus eſſe H, ad G, ut E, ad F; Eritque propterea major pro-
c 10. *quint.* portio A, ad G, quam H, ad G; *c* ideoque ma-
d 8. *quint.* jor erit A, quam H. *d* Quocirca A, major ad C, majorem habebit proportionem, quam H,
e 23. *quint.* minor ad eandem C: *e* At ut H, ad C, ita eſt ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam ut D, ad E, ita eſt G, ad C, & ut E, ad F, ita eſt H, ad G.) Major ergo etiam eſt proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod eſt propoſitum.]

THEOR.

[THEOR. 33. PROPOS. 33. xxxiij.

Si fuerit major proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum major proportio, quam totius ad totum.

Sit major proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, majorem esse, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim major sit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; *a* erit quoque permutando, major proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; *b* ac propterea, per conversionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD. *c* Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc est, EB, reliqua ad reliquam FD, majorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.] TAB. XXII. fig. 1. a 27. quint. b 30. quint. c 27. quint.

[THEOR. 34. PROPOS. 34. xxxiv.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque major proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc major, quam tertiæ ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, majorem proportionem; quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum, majorem denique etiam, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum.

Sint primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F. Sit autem major propor- TAB. XXII. fig. 2.

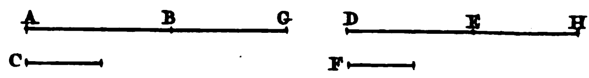
tio

tio A, ad D; quam B, ad E; Item major B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionem ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul majorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem vero, proportione A, ad D; majorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim major sit proportio
a 27. quint. A, ad D, quam B, ad E; *a* erit permutando
b 18. quint. major A, ad B, quam D, ad E. *b* Igitur componendo, major erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quam ipsarum D, E, simul ad E;
c 27. quint. *c* Permutando ergo rursus, major erit proportio A, B, simul ac D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, majorem habeat proportionem, quam ablata B, ad
d 33. quint. ablatam E; *d* habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, majorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, major erit proportio, B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multo ergo major erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F.
e 27. quint. *e* Permutamdo igitur, major erit proportio A, ad
f 28. quint. B, C, quam D, ad E, F; *f* & componendo ergo major est proportio totius A, B, C, ad B,
g 27. quint. C, quam totius D, E, F, ad E, F, *g* Et rursus permutando major proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul quam B, C, ad E, F, quod est primum.

Itaque cum sit major proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quam ablatæ B, C, ad abla-
h 33. quint. tam E, F, *h* erit & major proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod est secundum.

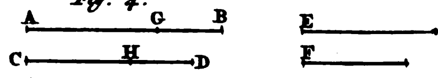
Quoniam vero major est proportio B, ad E,
i 27. quint. quam C, ad F; *i* erit permutando major quoque
k 28. quint. B, ad C, quam E, ad F; *k* & componendo, major totius B, C, ad C, quam totius E, F,
l 27. quint. ad F, *l* & rursus permutando, major B, C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem major proportio A, B, C, ad D, E, F, ut ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo major erit pro-

Fig. 3.



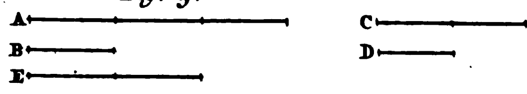
E F

Fig. 4.



L M

Fig. 5.



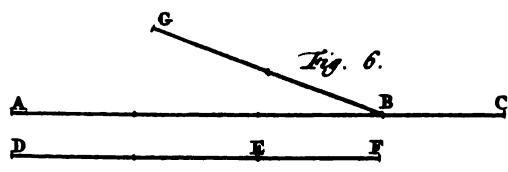


Fig. 7.

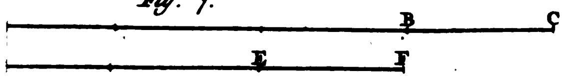


Fig. 8.

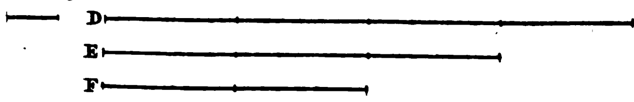
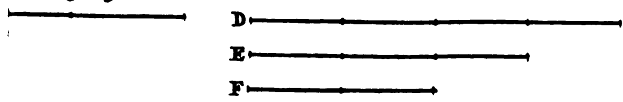


Fig. 9.



proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam ultimæ C, ad ultimam F, quod est tertium.

Deinde sint quatuor magnitudines utrobique cum eadem hypothesi, hoc est, sit quoque major proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quam G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Ut enim jam in tribus est ostensum, major est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo major erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. *m* Permutando ergo major erit A, ad B, C, G, quam D, ad E, F, H, *n* & componendo major A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H, *o* & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, major quam B, C, G, ad E, F, H, quod est primum.

TAB. XXII. fig. 3.

m 27. quint.

n 28. quint.

o 27. quint.

Itaque cum sit major proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H, *p* erit & reliquæ A, ad reliquam D, major proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quod est secundum.

p 33. quint.

Quoniam vero, ut in tribus est demonstratum, major est proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & major A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H, ut fuit ostensum; multo major erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam ultimæ G, ad ultimam H; quod est tertium.

Eadem arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.]

EUCLI-



EUCLIDIS ELEMENTUM SEXTUM.

DEFINITIO. I.

Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

TAB. XXII. fig. 4. *UT triangula ABC, DEF, similia dicentur si fuerint æquiangula, ita ut angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF; & ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, & ut AC, ad CB, ita DF, ad FE.*

Quod si anguli unius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figuræ similes: Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quanquam inter se maxime sint inæquales. TAB. XXII. fig. 5. *Cujusmodi sunt triangula æquilatera GHI, KLM. Propter laterum enim æqualitatem, erit GH, ad GI,*

GI, ut KL, ad KM. Item GH, ad HI, ut KL, ad LM, & GI, ad IH, ut KM, ad ML, cum ſemper ſit proportio æqualitatis. Idem dicendum eſt de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de aliis id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

DEFINITIO. II.

Reciprocæ autem figuræ ſunt, cum in utraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

UT ſi in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, ut utrobique ſit & antecedens, & conſequens diverſarum proportionum, hoc eſt, ut ſit ea proportio AB, ad EF, quæ FG, ad BC, ſeu eadem AB, ad FG, quæ EF, ad BC; (utroque enim modo AB, eſt antecedens unius proportionis & BC, conſequens alterius, in figura ABCD, quemadmodum & primo modo EF, eſt conſequens unius, & FG, antecedens alterius; vel ſecundo modo FG, conſequens, & EF, antecedens, in figura EFGH,) dicentur hujuſmodi parallelogramma reciproca, quamvis ſimilia non ſint. Similiter erunt triangula IKL, MNO, reciproca, ſi fuerit ut IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel ut IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neque memini me inveniſſe apud Geometras uſum reciprocarum figurarum in aliis figuris, quam in parallelogrammis, & triangulis. **TAB. XXII. fig. 6.** **TAB. XXII. fig. 7.**

DEFI-

DEFINITIO. III.

Secundum extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum ut tota ad majus segmentum, ita majus ad minus se habuerit.

TAB. XXII. fig. 8. *SI linea recta quævis AB, ita dividatur in C, inæqualiter, ut sit, quemadmodum tota AB, ad majus segmentum AC, ita AC, majus segmentum ad CB, minus segmentum; dicetur divisa esse secundum extremam, & mediam rationem.*

DEFINITIO. IV.

Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basin deducta.

TAB. XXII. fig. 9. *SI à vertice A, trianguli ABC, ad basin BC, perpendicularis ducatur AG, dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC; ita ut tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta est perpendicularis AG. Sic etiam perpendicularis DH, ducta à D, vertice trianguli DEF, ad basin EF, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF. Itaque si duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad bases (sive hæ protractæ sint, sive non) demissæ, fuerint æquales, eandem dicentur hujusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem hujusmodi perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cujusmodi sunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli AGH, DHG,*

DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immo duo recti; a *erunt recta AG, DH, parallelæ; Sunt autem & AD, GH, parallelæ, eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG;* b *ac propterea latera opposita AG, DH, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero AB, & DE; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad Basin DE, protractam æqualis non est perpendiculari ex C, ad basin AB, deducta, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, ut manifestum est.*

a 28. primi

b 34. primi

Recte vero ab Euclide altitudo figuræ cujusvis definita est per lineam perpendicularem, quæ à vertice ad basin deducitur: quoniam, ut scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimensione, mensura cujuscunque rei debet esse stata, determinataque, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataque longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminataque.

DEFINITIO. V.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QUoniam denominator cujuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (ut denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quavis proportione qua-

drupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis; ut idem significet quantitas alicujus proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu (ut vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, sive denominatorem. Ut proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & sextupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius.

Porro quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio primæ ad ultimam componi dicitur ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermediis constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, ut quinto libro defin. 10. exposuimus: ita ut si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad ultimam duplicata proportionis primæ ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiam

etiam in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio prima ad ultimam dicetur componi ex proportione prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad ultimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

DEFINITIO. VI.

[Parallelogrammum secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat majorem lineam, quam sit ea, secundum quam applicatur: ita tamen, ut parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum unum parallelogrammum.]

Sit data recta linea AB, supra quam constituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, sed desit CB; & ducta BF, parallela ipsi CD, donec cum ED, protracta conveniat in F, compleatur totum parallelogrammum ABFE. Parallelogrammum igitur AD, applicatum secundum rectam AB, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita ut DB, appelletur defectus. TAB. XXII. fig. 10.

Rursus sit data recta linea AC, supra quam constituantur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB, majus recta data AC; & ducatur CD, ipsi BF, parallela. Parallelogrammum igitur AF, applicatum secundum rectam AC, excedere dicitur parallelogrammo DB, ita ut DB, vocetur excessus.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases.

TAB. XXII. fig. 11. Sint duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, ejusdem altitudinis, quorum eædem bases BC, EF. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, ut est basis BC, ad basin EF. Hoc est, si basis BC, statuatur prima magnitudo, & basis EF, secunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æque multiplicia primæ ac tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere, ut definitio 6. libr. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas GH, LN, (Nam ut in defin. 4. dictum est, triangula ac parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas, sic enim perpendiculares à verticibus ad bases demissæ æquales erunt,) & ex BL, sumantur quotcunque rectæ BI, IK, KL, ipsi BC, æquales; Item ex FN, abscindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, AL; DM, DN, *a* erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex est ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex est recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot

a 38. primi

tot triangula æqualia sunt divisa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero si basis CL, æqualis fuerit basi EN, *b* necessario triangulum ACL, æquale est triangulo DEN, ac proinde si CL, major fuerit quam EN, necessario ACL, majus est quam DEN, & si minor, minus; deficient propterea una CL, recta, & triangulum ACL, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta & triangulo DEN, æque multiplicibus secundæ EF, & quartæ DEF, vel una æqualia erunt, vel una excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. *a* Quare quæ proportio est primæ BC, ad secundam EF, basis ad basim, ea est tertiæ ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. Quod est propositum. b 38. *primi* a 6. *def. quinti.*

Quoniam autem *b* ut triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG, (*c* quod duplum est trianguli ABC,) ad parallelogrammum EH; (*d* quod est duplum trianguli DEF,) perspicuum est, *e* ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, ut est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo usi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita se habent inter se, ut bases. Quod erat demonstrandum. b 15. *quint.* c 34. *primi* d 34. *primi* e 11. *quint.*

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint,

quæ ad sectiones adjuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

TAB. XXII. fig. 12. IN triangulo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse ut AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis

a 37. primi enim rectis CD, BE, *a* erunt triangula DEB, DEC, super eandem basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta inter se æqualia.

b 7. quint. *b* Quare ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangu-

c 1. sext. lum DEC: *c* Atqui ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est basis AD, ad basin DB; (cum hæc triangula sint ejusdem altitudinis, ut constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB.) & eadem ratione, ut triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita est basis AE, ad basin EC.

d 11. quint. *d* Ut igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC, (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & ejusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC.) Quod est propositum.

Secet deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursum rectis CD, BE,

e 1. sext. *e* erit ut basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint ejusdem altitudinis: Ponitur autem ut AD, ad DB, ita

f 11. quint. AE, ad EC. *f* Igitur erit ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC: Sed rur-

g 1. sext. sus *g* ut basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum sint alti-

h 11. quint. tudinis ejusdem. *h* Igitur ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem

i 9. quint. ADE, ad triangulum DEC. *i* Æqualia ergo sunt triangula DEB, & DEC: ac propterea,

k 39. primi cum eandem habeant basin DE, *k* inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC, quod est propositum. Si itaque ad

ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

IN triangulo ABC, recta AD, secet primo angulum BAC, bifariam. Dico esse ut BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipsi AD, donec cum CA, producta conveniat in E; (coibunt autem omnino BE, CA, propterea quod anguli C, & CBE, minores sunt duobus rectis *i*. Cum enim C, & CDA, *a* minores duobus rectis sint; *b* sit autem angulus CDA, angulo CBE, externus interno, æqualis: erunt quoque C, & CBE, duobus rectis minores,) *c* eritque angulus EBA, æqualis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC, æquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, inter se æquales; *d* Ideoque & rectæ BA, EA, inter se æquales. *e* Ut igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC. *f* Atqui ut EA, ad AC, ita est BD, ad DC. Cum in triangulo BCE, recta AD, sit parallela lateri BE. *g* Igitur ut BA, ad AC, ita est BD, ad DC. Quod est propositum.

TAB. XXII. fig. 13.

i 13. *pron.*
a 17. *primi*
b 29. *primi*
c 29. *primi*
d 6. *primi*
e 7. *quint.*
f 2. *sext.*
g 11. *quint.*

Sit deinde ut BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam secare angulum BAC. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi AD,

b 31. primi parallela *b* coiens cum CA, protracta in E. Quoniam igitur ut BA, ad AC, ita ponitur BD, e 2. sext. ad DC. *e* Ut autem BD, ad DC, ita est EA, ad AC; (quod in triangulo BCE, recta AD, f 11. quint. sit lateri BE, parallela) *f* erit ut BA, ad AC, g 9. quint. ita EA, ad eandem AC. *g* Æquales igitur sunt h 5. primi BA, & EA, inter se, *h* ac propterea anguli i 29. primi ABE, & E, æquales quoque erunt. *i* Cum igitur angulus ABE, æqualis sit alterno BAD, & angulus E, externo DAC, erunt & duo anguli BAD, DAC, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

iv. THEOR. 4. PROPOS. 4.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

TAB. XXII. fig. 14. Sint æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, BAC, CDE. Dico esse AB, ad BC, ut DC, ad CE, & BC, ad CA, ut CE, ad ED; & AB, denique ad AC, ut DC, ad DE: Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera BC, CE, secundum lineam rectam, ita ut angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC, a 17. primi ACB, *a* minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & b 13. pron. anguli B, & E, duobus rectis minores. *b* Quare rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conveniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, æqualis est

est interno opposito ABC; *c* parallelæ erunt CD, & BF, Eadem ratione parallelæ erunt CA, & EF, quod angulus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur ACDF, *d* propptereaque recta AF, æqualis rectæ CD; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, *e* erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quæ æqualis est ipsi AF,) ut BC, ad CE. Permutando *f* igitur erit AB, ad BC, ut DC, ad CE. Rursus quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, *g* erit BC, ad CE, ut FD, hoc est, ut CA, (quæ æqualis est ipsi FD,) ad ED. Permutando *h* igitur erit BC, ad CA, ut CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC, ut DC, ad CE, & BC, ad CA, ut CE, ad ED: *i* erit & ex æqualitate AB, ad CA, ut DC, ad ED. Quod est propositum. Æquiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

c 28. primi

d 34. primi

e 2. sext.

f 16. quint.

g 2. sext.

h 16. quint.

i 22. quint.

COROLLARIUM.

Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE, Dico triangulum ADE, triangulo ABC, esse simile. Æquiangula namque sunt, *k* cum anguli ADE, AED, æquales sint angulis ABC, ACB, externis; & angulus A, communis. Quare ut demonstratum est, *l* habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

TAB. XXII. fig. 15.

k 29. primi

l 4. sext.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

v.

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

Habeant triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, ut DE, ad EF,

TAB. XXIII. fig. 1.

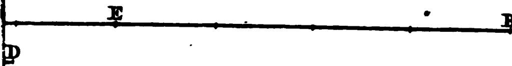
EF, & BC, ad CA, ut EF, ad FD, & AB, denique ad AC, ut DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æ-
k 23. primi quales respiciunt homologa latera. *k* Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C, conveniantque rectæ EG, FG, in G:
a 32. primi *a* eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Æquiangula igitur sunt triangula ABC,
b 4. sext. GEF. Quare *b* ut AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Ut autem AB, ad BC, ita ponitur DE,
c 11. quint. ad EF. *c* Igitur ut GE, ad EF, ita est DE,
d 9. quint. ad EF, eandem: *d* proptereaque æquales erunt
e 4. sext. GE, DE. Rursus, *e* quoniam ut BC, ad CA, ita est EF, ad FG: Ut autem BC, ad CA, ita
f 11. quint. ponitur EF, ad FD; *f* erit ut EF, ad FG, ita
g 9. quint. eadem EF, ad FD; *g* ideoque æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG, FG, æqualia sint lateribus DE, DF, utrumque utrique; & basis
h 8. primi communis EF; *h* erunt anguli G, & D, æqua-
i 4. primi les, *i* ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus, G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit, quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

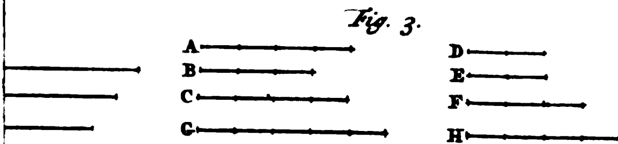
vi. THEOR. 6. PROPOS. 6.

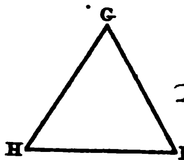
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

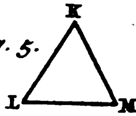
TAB. XXIII. fig. 2. Sit angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli DEF, sintque latera AB, BC, pro-

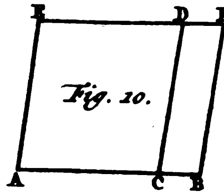
TAB. XXII.

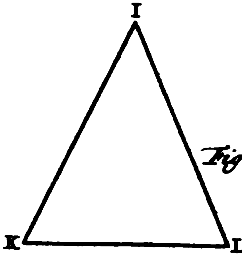

E
B
D

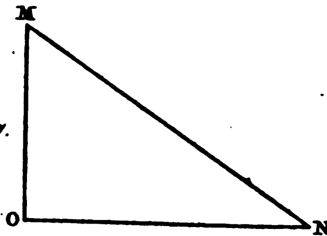

Fig. 3.
A
B
C
G
D
E
F
H

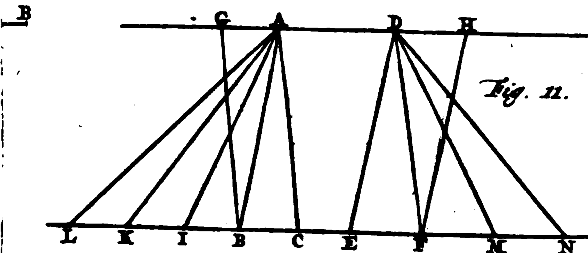

G
H
I

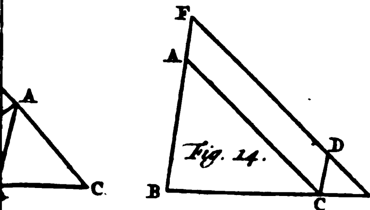

Fig. 5.
K
L
M

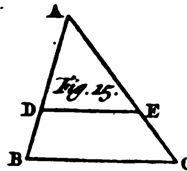

E
D
F
Fig. 10.
A
C
B


I
K
L


Fig. 7.
M
O
N


B
G
A
D
H
Fig. 11.
L
K
I
B
C
E
F
M
N


A
C
F
A
Fig. 14.
D
B
C
E


A
Fig. 15.
D
E
B
C

proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, ut DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; *d* & angulo C, angulus EFG, eritque ut in præcedenti propos. dictum est, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare *a* ut AB, ad BC, ita est, GE, ad EF: Sed ut AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. *b* Igitur ut DE, ad EF, ita est GE, ad eandem EF; *c* atque idcirco DE, GE, æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia sint lateribus GE, EF, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est positus angulus DEF, proptereaque æquales ad invicem erunt anguli DEF, GEF.) *d* erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, EFD, & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF, quod est propositum. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

d 23. primi
a 4. sext.
b 11. quint.
c 9. quint.
d 4. primi

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul utrumque aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

SIt angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo D, trianguli DEF, & latera AC, CB, circa angu-

TAB. XXIII. fig. 3.

angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc est sit ut AC, ad CB, ita DF, ad FE, hac tamen lege, ut quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet ACB, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli ACB, & F, non sunt æquales, sit ACB, major quam F: fiatque ipsi F, æqualis ACG. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis,
a 32. *primi* *a* erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF, æquiangula erunt.
b 4. *sext.* Quare *b* ut AC, ad CG, ita erit DF, ad EF: Sed ut DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB.
c 11. *quint.* *c* Ut igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC,
d 9. *quint.* ad CB, *d* ac propterea æquales erunt CG, CB,
e 5. *primi* *e* & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC,
f 13. *primi* recto major; *f* cum AGC, CGB, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus AGC, angulo E, æqualis. Major igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

Sit deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque ut prius, angulus B, angulo CGB, æqualis, ideoque & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel majores, vel æquales duobus rectis,
g 17. *primi* quod est absurdum. *g* Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli ACB,
h 32. *primi* & F, sed æquales, atque *h* idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt; quod est propositum. Si duo itaque triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, à quo ad basin perpendicularis agatur AD. Dico triangula ADB, ADC, similia esse & toti triangulo ABC, & inter se. Cum enim in triangulis ABC, DBA, anguli BAC, & ADB, sint recti, & angulus B, communis; *a* erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Æquiangulum est igitur triangulum DBA, triangulo ABC, *b* ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit ut CB, ad BA, ita BA, ad BD; & ut BA, ad AC, ita BD, ad DA; & ut BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, ut vult propos. 4. hujus lib. Quare simile est triangulum ADB, toti triangulo ABC. Eodem modo ostendetur triangulum ADC, simile eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, & ADC, sunt recti, & angulus C, communis; *c* ac propterea anguli ABC, & CAD, æquales. Quare *d* ut BC, ad CA, ita est CA, ad CD; & ut CA, ad AB, ita CD, ad DA, & ut CB, ad BA, ita CA, ad AD. Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propos. 4. hujus lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula ADB, & ADC, cum anguli ADB, ADC, sint recti, & anguli ABD, CAD, ostensi æquales, nec non anguli BAD, ACD; Atqui idcirco sit *e* ut BD, ad CA, ita DA, ad DC; & ut DA, ad AB, ita DC, ad CA; & ut AB, ad BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis

TAB. XXIII. fig. 4.

a 32. primi

b 4. sext.

c 32. primi

d 4. sext.

e 4. sext.

laris ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item utrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adjacet.

Ostensum est enim, esse ut BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, esse mediam proportionalem inter BD, & CD: Item esse ut CB, ad BA, ita BA, ad BD; & idcirco BA, mediam esse proportionalem inter CB, & BD: Denique esse ut BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, esse proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod est propositum.

PROBL. 1. PROPOS. 9.

A data recta linea imperatam partem auferre.

TAB. XXIII. fig. 5. IMperetur, ut ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, utcunque faciens angulum CAB; & ex AC, abscindantur tot partes æquales cujuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex AB, ut in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF, lateri FB, parallela sit recta DG; *a* erit ut FD, ad DA, ita BG, ad GA. *b* Componendo igitur, ut FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur & BA, ipsius AG, erit tripla; ideoque AG, tertia pars erit ipsius AB, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

a 2. sext.
b 18. quint.

THEOR.

PROBL. 2. PROPOS. 10. xij.

Datam rectam lineam insectam similiter secare, ut data altera recta secta fuerit.

Sit recta AB, secanda similiter, ut secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Conjungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque BAC, & connectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in F, & G, ut est secta AC, in D, & E, *a* ut AD, ad DE, ita est AF, FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I; *b* erit rursus, ut DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; *c* quod FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, ut data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

TAB. XXIII. fig. 6.

a 2. sexti.
b 2. sexti.
c 34. primi.

PROBL. 3. PROPOS. 11. x.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem adinvenire.

Sint duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, ut efficiant angulum A, quemcunque, sitque invenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequens esse debet, sive media. Deinde ducta recta BC, agatur

TAB. XXIII. fig. 7.

agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse ut AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela sit recta BC; *a* erit ut AB, ad BD, ita AC, ad CE: *b* Sed ut AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD. Ut igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinvenimus. Quod erat faciendum.

a 2. *sext.*
b 7. *quint.*

SCHOLIUM.

Inventa autem tertia linea continue proportionali, si primum omiseris, & aliis duabus tertiam inveneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Ut si lineis A, & B, adinveniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D. erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, sexta, septima, octava; & sic in infinitum.

TAB. XXIII. *fig.* 16.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.

TAB. XXIII. *fig.* 8.

Sint tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus invenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponantur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE, acta sit parallela BD; *a* erit ut AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta

a 2. *sext.*

quarta est proportionalis; ac propterea tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 5. PROPOS. 13. ix.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinvenire.

Sint duæ rectæ AB, BC, quibus media invenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Divisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & intervallo EA, vel EC, semicirculus describatur, ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam usque. Dico BD, esse, mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; *a* erit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB, erit per corollarium propos. 8. hujus lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis mediam proportionalem adinvenimus. Quod erat faciendum.

TAB. XXIII. fig. 9.

a 31. *tertii.*

THEOR. 9. PROPOS. 14. xiij.

Æqualium & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

Sint duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reci-

TAB. XXIII. fig. 10.

proca, hoc eſt, eſſe ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Conjungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita ut AB, & BG, unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, ſint æquales, erunt & EB, BG, una recta linea, ut ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtravimus. Producantur jam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur
a 7. quint. æqualia ſunt parallelogramma DB, BF: *a* erit ut DB, ad BH, ita BF, ad idem BH: Sed ut
b 1. ſext. DB, ad BH, *b* ita eſt AB, baſis ad baſin BG, quod parallelogramma ſint ejuſdem altitudinis; & ſimiliter ut BF, ad BH, ita eſt baſis EB, ad baſin BC. Igitur ut AB, ad BG, ita eſt EB, ad BC. Quod eſt propoſitum.

E contrario ſint jam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc eſt, ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione; cum ſit, ut AB, ad BG, ita EB, ad
c 1. ſext. BC: *c* Ut autem AB, ad BG, ita DB, ad BH; & ut EB, ad BC, ita BF, ad idem BH; erit
d 9. quint. quoque DB, ad BH, ita BF, ad idem BH. *d* Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

xiv. THEOR. 10. PROPOS. 15.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia.

TAB. XXIII. fig. 11. Sint duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe ut

ut AB, ad BE, ita DB, ad BC. Conjungantur enim triangula ad angulos æquales, ita ut AB, BE, efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, DBE, sint æquales; erunt & DB, BC, una recta linea, ut demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia sunt triangula ABC, DBE, *a* erit ut ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE. Sed ut triangulum ABC, ad triangulum BCE, *b* ita est basis AB, ad basin BE, quod hæc triangula ejusdem sint altitudinis; & similiter ut DBE, & BCE, ita est basis DB, ad BC. Quare ut AB, ad BE, ita est DB, ad BC. Quod est propositum.

a 7. *quint.*

b 1. *sext.*

Jam vero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, ut AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triangula ABC, DBE, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit ut AB, ad BE, ita DB, ad BC; ut autem AB, ad BE, *c* ita triangulum ABC, ad triangulum BCE; & ut DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE; Erit ut ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, *d* proptereaque æqualia erunt triangula ABC, DBE. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

c 1. *sext.*

d 9. *quint.*

THEOR. 11. PROPOS. 16. XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur, rectangulo; illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; ut quidem AB, ad FG, ita EF, ad

TAB. XXIII. fig. 12.

ad BC: Sitque rectangulum ABCD, comprehensum sub extremis AB, BC; rectangulum vero EFGH, comprehensum sub mediis EF, FG: Dico rectangula AC, EG, esse æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit ut AB, ad FG, ita EF, ad BC; erunt latera
a 14. sext. circa æquales angulos B, & F, reciproca. *a* Quare parallelogramma AC, EG, æqualia erunt. Quod est propositum.

Contra vero, sint jam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse ut AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, EG, habeantque angulos æqua-
b 14. sext. les, nempe rectos B, & F, *b* erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

xvi. THEOR. 12. PROPOS. 17.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

TAB. XXIII. fig. 13. Sint tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales: ut quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: sitque rectangulum ABCD, contentum sub extremis AB, BC, & quadratum mediæ EF, sit EFGH. Dico æqualia esse rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; ut quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehensum sub mediis EF, FG, propter æqua-

qualitatem rectarum EF, FG. *a* Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub mediis EF, FG, comprehenso: Quod est propositum. a 16. sext.

Sed sint jam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, & EG; *b* erit ut AB, ad EF, ita FG, ad BC: *c* Ut autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, æqualis, ad eandem BC. Quare ut AB, ad EF, ita est EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum. b 16. sext. c 7. quint.

COROLLARIUM.

Ex posteriori hujus theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasvis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.

PROBL. 6. PROPOS. 18. xix.

A data recta linea dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere.

Sit data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resolvant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI; coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quod duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores TAB. XXIII. fig. 14.

 sunt

ſunt, cum æquales ſint duobus angulis FCD,
a 17. primi FDC, a qui duobus rectis ſunt minores)
b 32. primi b eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rurſus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, an-
c 17. primi gulus BIH. Et c quia duo anguli EDF, EFD, minores ſunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritque eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & an-
d 17. primi gulo FCG, angulus IAK: d Et quia duo anguli GCF, GFC, minores ſunt duobus rectis: erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, convenient in aliquo puncto. Conveniant ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec abſolvantur omnia triangula rectilinei propoſiti, ſi plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, ſimile eſſe, ſimiliterque poſitum. Cum enim angulus IAB, conſtitutus ſit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit, & reliqui reliquis, ut conſtat ex conſtructione; cum ſingulæ partes unius ſingulis partibus alterius factæ ſint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK,
e 4. ſext. rectilineo CDEFG. Quoniam vero e ita eſt AB, ad BI, ut CD, ad DF: & ita BI, ad BH, ut
f 22. quint. DF, ad DE: f erit ex æquo ita AB, ad BH, ut CD, ad DE. Quare latera circa æquales angu-
g 4. ſext. los ABH, CDE, proportionalia ſunt, g quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia ſunt, ob triangula æquiangula
h 4. ſext. BHI, DEF. h Rurſus ita eſt HI, ad IB, ut EF, ad FD, & ita IB, ad IA, ut FD, ad FC:
i 22. quint. & ita IA, ad IK, ut FC, ad FG. i Igitur ex

ex æquo erit ita HI, ad IK, ut EF, ad FG, & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta, A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum descripsimus. Quod faciendum erat.

THEOR. 13. PROPOS. 19. xvij.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint triangula similia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et sit ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam ejus, quam habent latera homologa BC, & EF, vel AB, & DE, vel AC, & DF; Hoc est, si homologis lateribus BC, EF, inveniatur tertia proportionalis BG: ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, ut rectam BC, ad rectam BG: ac proinde cum ex defin. 10. lib. 5. proportio BC, ad BG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF: proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, EF. Ita ut nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quam ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, ut est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continue proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG, continue proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde & tertia pro- *TAB. XXIII. fig. 15.*

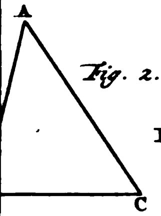
portionalis BG, illis æqualis: ita ut proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, ſit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, *a* quod ipſa inter ſe æqualia ſint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, quibus adjacent: erit triangulum ad triangulum, ut recta BC, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam habet latus BC, ad latus EF, duplicata. Quod etiam hinc conſtare poteſt. Quoniam, ut dictum eſt, triangula ABC, DEF, æqualia ſunt, hoc eſt, proportionem æqualitatis habent, ſicut & latera homologa BC, EF: proportio autem æqualitatis duplicata ſolum efficit proportionem æqualitatis: (Poſitis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad ſecundam, ut conſtat ex defin. 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, ſicuti & prima ad ſecundam,) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam ejus, quam habet latus BC, ad latus EF. Quod eſt propoſitum.

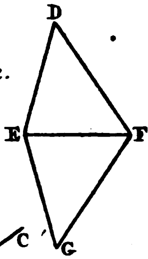
a 26. primi

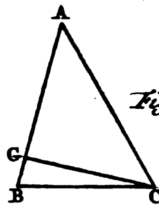
TAB. XXIV. fig. 1. Sit deinde BC, latus latere EF, majus; & ex BC, *b* abſcindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturque recta AG. Quia igitur eſt ut AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando ut AB, ad DE, ita BC, ad EF: Ut autem BC, ad EF, ita eſt per conſtructionem EF, ad BG. Ut ergo AB, ad DE, *c* ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, *d* ipſa inter ſe æqualia erunt; & propterea ut triangulum ABC, ad triangulum DEF, *e* ita erit idem triangulum ABC, ad triangulum ABG. Ut autem triangulum ABC, ad triangulum ABG, ejuſdem

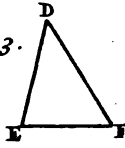
b 11. ſext.
c 11. quint.
d 15. ſext.
e 7. quint.

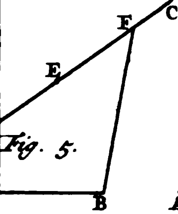
TAB. XXIII.

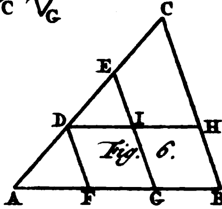


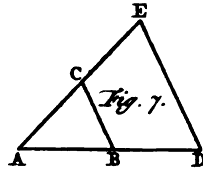


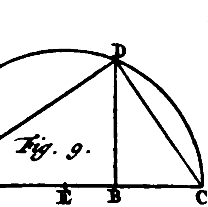


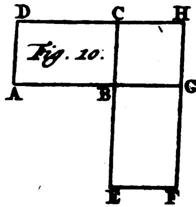


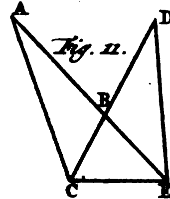


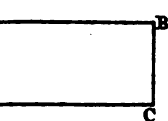




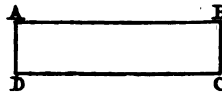














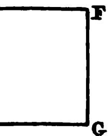
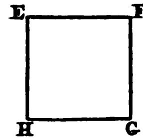
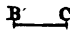




Fig. 13.







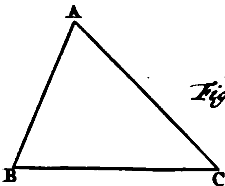
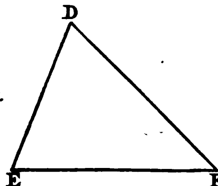


Fig. 15.





ejusdem altitudinis, *f*ita est basis BC, ad basin BG. Igitur ut triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est BC, ad BG. Atqui cum tres lineæ BC, EF, BG, sint continue proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis BC, primæ ad EF, secundam. Igitur & triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum. f 1. sext.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

Sint enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterque descripta. Dico, ut est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem 10. lib. 5. duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. *g* Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B. TAB. XXIV. fig. 2. g 19. sext.

Eodem modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, ut est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, ut est, recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. *h* Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa: Erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A. h 19. sext.

xviij. THEOR. 14. PROPOS. 20.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quàm latus homologum ad homologum latus.

TAB. XXIV. fig. 3. SInt polygona similia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; ut quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & ut BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona dividi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, FI; divisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; *a* æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales; Item angulos ACB, FHG, lateribus homologis oppositos: *b* Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter se similia erunt. Eadem ratione erunt similia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde *c* quia est ut AC, ad CB, ita FH, ad HG, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; ut autem CB, ad CD, ita est, ex hypothesi, HG, ad HI, ob similitudinem polygonorum: *d* erit ex æquo ut AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; est autem & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis, *e* Quare triangula ACD, FHI, cum habeant

a 6. sext.
b 4. sext.
c 4. sext.
d 22. quint.
e 6. sext.

beant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, æquiangula erunt, ideoque similia. Eademque ratio est de aliis omnibus triangulis, si plura fuerint.

Dico præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in uno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, ut polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. g Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH. g 19. sext. Quare ut triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI, cum utraque hæc proportio triangulorum sit duplicata ejusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, ut ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula unius polygoni cum triangulis alterius, ita ut triangula unius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Ut autem unum antecedens ad unum consequens f ita sunt f 12. quint. omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur ut quodlibet triangulum unius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

Dico postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam ejus, quam habent latera homologa, hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inveniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, ut est prima linea AB, ad tertiam inventam: ac proinde, cum proportio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG, dici quoque proportionem poly-

polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim sit, ut triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH,
g 19. sext. g habeat proportionem duplicatam ejus, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inventam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inventam. Itaque similia polygona in similia triangula dividuntur, &c. Quod demonstrandum est.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si fuerint tres rectæ proportionales, ut est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum: Vel ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile
TAB. XXIV. fig. 4. similiterque descriptum; uti si A, B, & C, sint tres proportionales, atque super A, & B, describantur duo polygona similia, uti sunt quadrata A, & B, erit A, ad C, ut quadratum super A, ad quadratum super B.

Hoc non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate. Ut perspicuum est in hac figura.

22. THEOR. 15. PROPOS. 21.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

TAB. XXIV. fig. 5. SInt rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI; Item

Item eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis ejusdem rectilinei GHI; *a* erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cum ob eandem similitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet iis, quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus ejusdem rectilinei GHI; *b* erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum iis, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem primam hujus, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

a 1. prim.

b 11. quint.

THEOR. 16. PROPOS. 22.

xxi.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, ut quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; Constituanturque super AB, CD, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta, EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia, ut quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. *a* Inveniatur enim a rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. *b* eritque ex æquo, ut AB, ad P, ita EF, ad Q: Ut autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex coroll. propos. 20.

TAB. XXIV. fig. 6.

a 11 sext.

b 22. quint.

20. hujus lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, ut EF, ad Q,
c 11. quint. ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. c Igitur ut ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.

Deinde sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoque proportionales, ut quidem
d 12. sext. AB, ad CD, ita EF, ad GH. d Inveniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterque posi-
e 21. sext. tum; e & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, ut AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque ut jam est ostensum, ut ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Ut autem ABI, ad CDK,
f 11. quint. ita quoque ponitur EM, ad GO. f Igitur erit
g 9. quint. ut EM, ad RV, ita EM, ad GO; g Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, ut mox ostendemus super rectas RS, GH, æ-
h 7. quint. quales. h Quare erit ut EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, ut AB, ad
i 11. quint. CD. i Igitur erit quoque ut AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Quod autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, major. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit ut GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, major quam RS, erit quoque HO, major quam SV, & propterea rectilineum GO, majus rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit constitui; quod est ab-

absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inaequales sunt rectae GH, RS. Quod est propositum.

Aliter. Sint duo rectilinea ABC, DEF, aequalia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cujusmodi sunt rectae AB, DE, esse aequalia. Si enim non credantur aequalia, sit AB, majus, quam, DE, inveniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, ut AB, ad DE, ita DE, ad G. Est autem AB, major, quam DE. Erit quoque DE, major, quam G, ac propterea multo major AB, quam G. Ut vero AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propos. 19. vel 20. hujus lib. Igitur cum AB, major sit, quam G, erit quoque rectilineum ABC, majus rectilineo DEF, quod est absurdum, cum positum sit aequale. Non ergo major est AB, recta quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus ostenderetur rectilineo DEF, quod est contra hypothesin. Quare aequales sunt rectae AB, DE. TAB. XXIV. fig. 7.

THEOR. 17. PROPOS. 23. xxiv.

Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent eam, quae ex lateribus componitur.

SInt parallelogramma aequiangula AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, aequales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum aequalem, ad duo latera alterius circa angulum aequalem, ita ut antecedentia proportionum sint in uno Parallelogrammo, & consequen- TAB. XXIV. fig. 8.

quentia in altero; hoc est, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectam CG. Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita ut I, ad K, sit, sicut BC, latus ad latus CG, & K, ad L, ut latus DC, ad latus CE; ita esse parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, ut est recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. hujus lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compositam esse ex eisdem proportionibus; hoc est, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Conjungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita ut BC, CG, efficiant unam lineam rectam: Quo posito, cum anguli BCD, ECG, sint æquales, erunt & DC, CE, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstravimus. Producantur deinde AD, FG, donec conveniant in H; Sumptaque recta I, quacunque, *a* inveniatur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, *b* ut BC, ad CG, ita AC, ad CH. Ut autem BC, ad CG, ita posita est I, ad K, *c* erit quoque ut AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, ut HC, ad CF, ita K, ad L. Nam ut DC, ad CE, *d* ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, ut DC, ad CE, erit quoque HC, ad CF, ut K, ad L: *e* Ex æquo igitur erit, ut AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. hujus lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF. Eademque ratione ostendemus, proportionem AC, ad

a 12. sext.
b 1. sext.
c 11. quint.
d 1. sext.
e 22. quint.

ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dummodo parallelogramma ita conjungantur ad angulos æquales, ut BC, CG, efficiant unam rectam lineam, &c. Æquiangula itaque parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 18. PROPOS. 24. xxiii.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

ESto parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet ejus punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma EG, FH, circa diametrum, similia esse & toti parallelogrammo & inter sese. Quod enim æquiangula sint toti, facile ostendetur. Nam angulus GAE, idem est, qui angulus BAD; a & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est EG, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum sit triangulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, ut perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. vel etiam ex coroll. propos. 4. hujus lib. b erit ut AB, ad BC, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus c erit, ut BC, ad CA, ita GI, ad IA; Item ut CA, ad CD, ita IA, ad IE. d Ex æquo igitur, ut BC, ad CD, ita est GI, ad IE, ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt.

TAB. XXIV. fig. 9.

a 29. primi

b 4. se.

c 4. se.

d 22. qu.

R

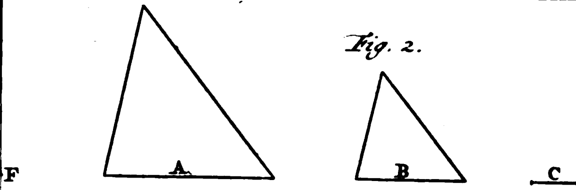
existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales esse proportionalia. Quare per definitionem primam hujus, simile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo BD;
e 21. *sext.* *e* atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

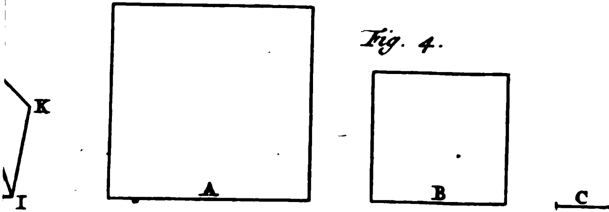
XXV. PROBL. 7. PROPOS. 25.

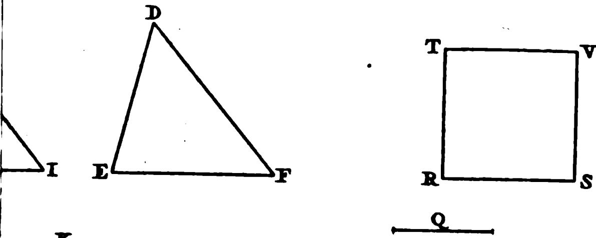
Dato rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

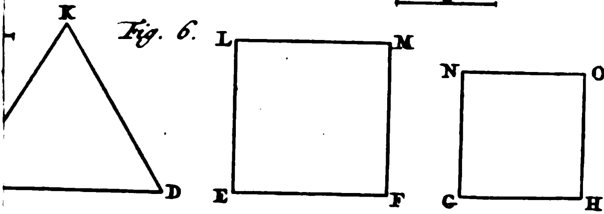
TAB. XXV. fig. 1. Sint data duo rectilinea A, & B; sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, unum latus rectilinei, cui simile debet con-
a 44. *vel* 45. *primi* stitui, *a* constituatur parallelogrammum CE, in quovis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B, eritque tam CDG, quam FEH, linea una recta, ut demon-
b 13 *sext.* stratum est propos. 45. lib. 1. *b* Inveniatur jam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK,
c 18. *sext.* *c* super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll. propos. 19. vel 20. hujus lib. ut CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineum L, super IK, se-
d 1. *sext.* cundam simile similiterque descriptum: *d* Ut autem CD, ad DG, ita est parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, ejusdem altitudinis.
e 11. *quint.* *e* Igitur erit ut CE, ad DH, ita A, ad L.
f 7. *quint.* *f* Ut autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A, & paral-

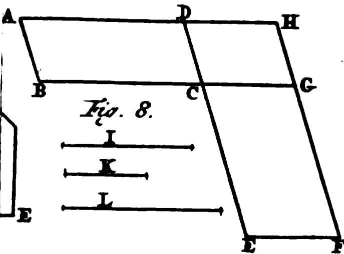
TAB. XXIV.

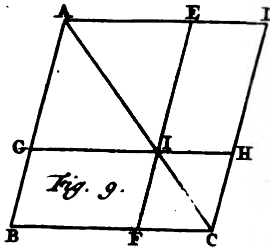

Fig. 2.
F
A
B
C


Fig. 4.
K
I
A
B
C


D
I
E
F
T
V
R
S


Q
K
Fig. 6.
L
M
N
O
D
E
F
G
H


A
D
H
B
C
G
Fig. 8.
I
K
L
E
E
F


A
E
D
G
I
H
Fig. 9.
B
F
C

parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. *g* Quare erit ut A, ad B, ita A, ad L; *h* propter eaque æqualia erunt rectilinea B, & L: Est autem & L, simile ipsi A, similiterque positum per constructionem. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

g 11. *quint.*
h 9. *quint.*

THEOR. 19. PROPOS. 26. xxiij.

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

EX parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterque positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint una linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & AC, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quod si AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter AC, secans latus EF, in H, puncto, per quod ipsi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHC; *a* ipsa erunt similia similiterque posita. *b* Quare erit ut BA, ad AD, ita EA, ad AI. Sed ut BA, ad AD, ita quoque est EA, ad AG, quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam similia, similiterque posita. *c* Igitur erit ut EA, ad AI, ita EA, ad AG, *d* Ac propterea æquales erunt rectæ, AI, & AG, pars, & totum: quod est absurdum.

TAB. XXV. fig. 2.
a 24. *sext.*
b 1. *def. sext.*
c 11. *quint.*
d 9. *quint.*

Quod

TAB. XXV. fig. 3. Quod si dicatur recta AHC, secare alterum latus FG. Tunc ducta HI, parallela ipsi EF, e erunt rursus similia parallelogramma BD, IG, similiterque posita. f Quare erit ut DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed ut DA, ad AB, ita quoque est GA, ad AE, ob similitudinem parallelogrammorum BD, EG. g Igitur erit ut GA, ad AI, ita GA, ad AE, h ideoque æquales erunt rectæ AI, AE, pars & totum: Quod est absurdum. Constituunt ergo rectæ AF, FC, unam rectam lineam; hoc est, ducta diameter AC, transit per punctum F; & ducta diameter AF, eaque producta cadit in punctum C. Itaque si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

e 24. sext. f 1. def. sext. g 11. quint. h 9. quint.

xxvi. THEOR. 20. PROPOS. 27.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod à dimidia describitur; maximum, id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

TAB. XXV. fig. 4. Detur recta AB, divisa bifariam in C, superque ejus dimidiam BC, constituatur quodcunque parallelogrammum CDEB, cujus diameter BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum ABEH, erit parallelogrammum AD, super dimidiam AC, consistens, applicatum secundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & existens simile defectui CE. Dico parallelogrammum AD, ad dimidiam AC, applicatum deficiensque parallelogrammo CE, maximum esse omnium, quæ secundum AB, rectam applicantur, deficiuntque parallelogrammis similibus similiterque positis ipsi CE. Sumpto enim puncto G, utcunque in diametro BD, & ductis per G, rectis

rectis FGI, KG, quæ sint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum FK, secundum rectam AB, applicatum, deficiens parallelogrammo KI, *a* quod ipsi CE, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum CE, diametrum. *b* Quoniam vero complementa CG, GE, æqualia sunt; si addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: *c* Est autem CI, æquale ipsi CF, propter bases æquales AC, CB. Igitur & CF, KE, æqualia erunt; additaque communi CG, æqualia erunt parallelogrammum AG, & gnomon LM. Quare cum CE, majus sit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc DG,) erit quoque AD, *d* æquale existens ipsi CE, propter bases æquales AC, CB, majus quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo DG. Eodemque modo ostendetur AD, majus esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam AB, applicantur, ut punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant majorem lineam semisse AC, habentque minorem altitudinem, quam AD, dummodo defectus similes sint ipsi CE.

a 24. *sexti*
b 43. *primi*
c 36. *primi*
d 36. *primi*

Aliter demonstrabitur AD, majus esse parallelogrammo AG, hoc modo. *e* Parallelogramma FD, DI, sunt æqualia, cum bases HD, DE, sint æquales: Est autem DI, majus quam GE, hoc est, quam complementum CG, (*f* quod ipsi GE, æquale est,) parallelogrammo DG. Igitur & FD, majus erit, quam CG, parallelogrammo eodem DG. Atque idcirco addito communi CF, majus erit AD, quam AG, parallelogrammum eodem DG.

e 36. *primi*
f 43. *primi*

Quod si punctum G, sumatur in diametro BD, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratque rectis AK, BE, protractis in H, & M. Item ducta GF, parallela ipsi AH; erit parallelogrammum AG, applicatum secundum rectam AB, deficiens parallelogrammo FM,

TAB. XXV. fig. 5.

g 14. sext. g quod ipsi CE, est simile similiterque positum, cum sit circa eandem diametrum cum CE. Dico adhuc majus esse AD, ipso AG. Protracta
h 34. primi enim CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, *h* cum
i 36. primi æquales sint æqualibus AC, CB; *i* ideoque
k 43. primi æqualia parallelogramma HD, DM. *k* Cum igitur DM, sit æquale complemento DF; erit & HD, æquale ipsi DF. Est autem HD, majus quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, majus erit quam HI, eodem parallelogrammo IL. Ac propterea communi addito AI, majus erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iisdem argumentis concludes AD, majus esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, ut punctum G, sit ultra D, in diametro BD, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam semisse AC, habetque majorem altitudinem, quam AD: dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

xxvij. PROBL. 8. PROPOS. 28.

Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus, cui simile deesse debet.

TAB. XXV. fig. 6. AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB, bifariam

riam in E, ſuper medietatem EB, *a* deſcribatur parallelogrammum EFGB, ſimile ipſi D, ſimiliterque poſitum; & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale eſt ipſi C; cum ſit applicatum ad AB, deficiens parallelogrammo EG, ſimile ipſi D, factum erit, quod jubetur. Si autem AF, majus eſt quam C. (Neque enim minus eſſe debet. Nam cum per propoſ. præcedentem, ipſum ſit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus ſint ſimiles, non poſſet applicari ullum ad AB, quod eſſet ipſi C, æquale, ſed omnia eſſent minora. Propterea adjunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque ſibi æquale EG, majus quam C. Sit igitur majus rectilineo I. (Qua vero ratione exceſſus duorum rectilineorum ſit inquirendus, docuimus ad propoſ. 45. lib. 1.) *b* & conſtituatur parallelogrammum KLMN, ſimile quidem ſimiliterque poſitum ipſi D, ſeu ipſi EG, æquale vero exceſſui invento I; ut ſit EG, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM, ſimul; & ob id majus quam KM. Cum igitur ob ſimilitudinem ſit ut EF, ad FG, ita NK, ad KL; erunt quoque latera EF, FG, majora lateribus NK, KL. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, eſſet etiam EG, æquale ipſi NL, vel minus, ut conſtat. Quare abſciſſis rectis FO, FQ, quæ ſint æquales ipſis KN, KL, & completo parallelogrammo FQPO, erit hoc ipſi LN, æquale, & eidem ſimile ſimiliterque poſitum, & propterea ipſi EG: *c* atque adeo circa eandem diametrum cum EG, conſiſtet, quæ ſit BF, productis jam rectis QP, OP, erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, applicatum deficiens parallelogrammo PB, *d* quod ſimile eſt ipſi EG, ſimiliterque poſitum, & propterea ipſi D. Dico igitur AP, æquale eſſe ipſi C, rectilineo. *e* Nam cum PG, æquale ſit complemento PE; ſi addatur commune PB, erit & BQ, æquale ipſi ER, hoc eſt, ipſi ES, *f* quod æquale eſt ipſi ER, propter baſes æquales EA,

a 18. *ſext.* b 25. *ſext.* c 26. *ſext.* d 24. *ſext.* e 43. *primi* f 36. *primi*

EB. Quare si æqualibus AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, æqualis est rectilineo C, (Nam cum EG, parallelogrammum æquale sit ipsi C, una cum LN, si auferantur æqualia QO, LN, remanebit gnomon TV, ipsi C, æqualis.) Igitur & AP, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo AB, applicatum est parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

xxviij. PROBL. 9. PROPOS. 29.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

TAB. XXV. fig. 7. AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit Parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Divisa AB,
a 18. *sext.* bifariam in E; *a* super dimidiam EB, construatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, simili-
b 14. *sex.* terque positum. *b* Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æ-
c 25. *sext.* quale; *c* cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, simile vero ipsi EG, similiterque positum; eritque propterea IKLM, majus quam EFGB, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, una cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit ut MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, majora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque MK, vel æquale ipsi EG, vel minus, ut perspicuum est. Productis igitur FE, FG, ut rectæ FO, FN, æquales sint rectis IM, IK, & completo paralle-

lelogrammo ON; erit hoc simile similiterque positum ipsi EG, cum sit æquale ipsi MK, & simile, similiterque positum. *d*Quare ON, EG, circa eandem diametrum consistent, quæ sit FP. Productis jam AB, GB, ad Q, R; & PO, donec cum AS, ipsi FO, parallela conveniat in S, erit parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, excedens parallelogrammo QR, *e* quod simile est ipsi EG, ac propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse rectilineo C. *f*Nam cum AO, ER, sint æqualia, *g* & ER, æquale complemento BN, erit & AO, ipsi BN, æquale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis est rectilineo C. (Nam cum MK, hoc est, ON, æquale sit rectilineo C, una cum EG, si auferatur commune EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedens parallelogrammo RQ, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

d 26. sexti. e 24. sexti. f 36. primi g 43. primi

PROBL. 10. PROPOS. 30. xxix.

Propositam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

Sit recta AB, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD; *a* ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simile ipsi quadrato, ita ut sit AF, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC, si dematur commune AE, remanebunt æqualia GH, HC, quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE, utpote rectos, *b* erunt latera circa

TAB. XXV. fig. 8. a 29. sexti. b 14. sexti.

circa illos reciproca, hoc eſt, erit ut EH, hoc eſt, ut AB, ipſi EH, æqualis, ad HF, hoc eſt, ad AH, ipſi HF, æqualem, ut AH, ad HB. Quare cum ſit, ut tota AB, ad ſegmentum AH, ita ſegmentum AH, ad ſegmentum HB, ſecta eſt AB, extrema ac media ratione, per definitionem tertiam hujus. Propoſitam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

Aliter quoque oſtendemus AB, eſſe ſectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, ſitque rectangulum HC, comprehenſum ſub prima AB, & tertia HB, æ-
a 17. ſext. quale quadrato mediæ AH; c erunt ipſæ proportionales: ut AB, quidem prima ad AH, ſecundam, ita AH, ſecunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem ſecta eſt AB, in H, extrema ac media ratione.

d 11. ſec. Aliter totum problema conficiemus. d Dividatur AB, in C, ita ut rectangulum ſub tota AB,
TAB. XXV. fig. 9. & ſegmento CB, æquale ſit quadrato alterius ſegmenti AC. Dico AB, in C, eſſe ſectam ex-
e 17. ſext. trema ac media ratione. e Erunt enim rurſus, ut prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Conſtat ergo propoſitum.

THEOR. 21. PROPOS. 31.

In rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

TAB. XXV. fig. 10. Triangulum rectangulum ſit ABC, habens angulum BAC, rectum; deſcribaturque ſuper BC, quæcunque figura rectilinea BCDE, a cui
a 18. ſext. ſimiles ſimiliterque poſitæ ſuper AB, AC, conſtituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem eſſe duabus figuris AF, AI. Demiſſa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK, erit per coroll.

coroll. propoſ. 8. hujus lib. ut BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare ut BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, ſuper primam, ad figuram CH, ſuper ſecundam ſimilem ſimiliterque poſitam, per coroll. propoſ. 19. vel 20. hujus lib. & convertendo ut CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non ſecus oſtendetur, eſſe quoque ut BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, ſint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur eſt ut CK, prima quantitas ad BC, ſecundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item ut BK, quinta quantitas ad BC, ſecundam, ita BG, ſexta ad BD, quartam; *b* erit ut prima CK, cum quinta BK, ad BC, ſecundam, ita tertia CH, cum ſexta BG, ad BD, quartam: Sunt autem prima CK, & quinta BK, ſimul æquales ſecundæ BC. Igitur tertia CH, & ſexta BG, ſimul æquales quoque erunt quartæ BD. Quod eſt eſt propoſitum. b 24. quint.

Aliter. *c* Cum triangulo ABC, ſimile ſit triangulum KAC, ſintque homologa latera ipſorum, BC, CA; (Nam eſt ut BC, ad CA, in triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo KAC,) *d* habebit triangulum KAC, ad triangulum ABC, duplicatam proportionem ejus, quam habet CA, ad BC, *e* habet autem & figura CH, ad figuram BD, proportionem duplicatam proportionis CA, ad BC. *f* Quare erit ut triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD. Eadem ratione oſtendetur eſſe, ut triangulum KBA, ad ABC: ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergo rurſus eſt, ut KAC, prima quantitas ad ABC, ſecundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item ut KBA, quinta ad ABC, ſecundam, ita BG, ſexta ad BD, quartam; *g* erit & prima KAC, compoſita cum quinta KBA, ad ſecundam ABC, ut compoſita tertia CH, cum ſexta BG, ad quartam BD: Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta ſimul, æquales ſecundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & ſexta ſimul,

c 8. ſext.
d 19. ſext.
e 19. vel 20. ſext.
f 11. quint.
g 24. quint.

simul, æquales quoque erunt quartæ BD. Quod est propositum.

Aliter. Ut quadratum rectæ AC, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita est figura CH, tertia quantitas,
h 19. vel 20. sext. ad figuram BD, quartam quantitatem; *h* cum utraque proportio sit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit ut quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita figura BG, sexta quantitas,
i 24. quint. ad figuram BD, quartam quantitatem. *i* Quocirca erit, ut prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ AC, cum quadrato rectæ AB, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet
k 47. primi ad figuram BD: *k* Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, simul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ CH, BG, figuræ BD, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quævis &c. Quod erat ostendendum.

XXX.
THEOR. 22. PROPOS. 32.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

TAB. XXV. Fig. 11. HAbeant triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, ut quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componanturque ad angulum ACD, ita ut latera homologa AB, DC, item AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam componere lineam. Cum enim parallelæ
a 29. primi sint AB, DC, *a* erit angulus A, alterno ACD, æqualis:

æqualis: Eademque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa *b* erunt inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, æqualibus angulis B, & DCE, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: *c* Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: *d* Atque idcirco BC, CE, unam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

b 6. sext.

c 32. primi

d 14. primi

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxiij.

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

Sint duo circuli æquales ABC, EFG, quorum centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistant anguli BDC, FHG; ad circumferentias vero anguli BAC, FEG. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. ut arcum BC, ad arcum FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG, & angulum BAC, ad angulum FEG; & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad sectorem FHG, quem comprehendunt rectæ FH, HG, & arcus FG. Ductis enim rectis BC, FG, *a* applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; CI, quidem ipsi BC.

TAB. XXV. fig. 12.

a 1. quart.

At

At vero GK, KL, ipsi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt
b 26. tertii. rectæ BC, CI, b erunt quoque æquales arcus
c 27. tertii. BC, CI, c ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK, KHL. Quam multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG, quia in tot angulos æquales divisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui
d 27. tertii. FGKL, d necessario angulus BDI, angulo FHL, æqualis est: Ac proinde si arcus BCI, major fuerit arcu FGKL, necessario angulus BDI, major est angulo FHL, & si minor, minor: Deficient propterea una arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel una æqualia erunt, vel una excedent, si ea sumantur, quæ inter se
e 6. def. quint. respondent. e Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

Atque hoc verum etiam est de spatiis circa centra, hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, ut spatium ad centrum D, insistens arcui BAC, ad spatium ad centrum H, insistens arcui FEG, ut ex demonstratione patet. Nam & hæc spatia, si æqualia sunt insistunt æqualibus arcubus, & si inæqualia, inæqualibus, &c.

Quoniam vero ut angulus BDC, ad angulum
f 15. quint. FHG, f ita est angulus BAC, ad angulum FEG, g cum

g cum illi horum ſint dupli, perſpicuum eſt, g 20. tertii.
h ita eſſe quoque angulum, BAC, ad angulum h 11. quinti.
FEG, ut eſt arcus BC, ad arcum FG. Quod tamen eiſdem argumentis demonſtrari poteſt, quibus uſi ſumus in angulis ad centra conſtitutis, ſi prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

Quod ſi ad circumferentias conſtituti ſint anguli ejuſmodi BAC, FEG, ut rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, non conſtituant angulos in centris verſus arcus BMC, FG; ſumenda erunt ſpatia BDC, FHG; quæ dupla etiam ſunt angulorum ad circumferentias.

Conſtituantur jam in ſegmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, i qui æquales erunt, cum in- i 27. tertii.
ſiſtant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare ſimilia erunt ſegmenta BMC, CNI, k atque adeo k 24. tertii.
inter ſe æqualia, propterea quod ſunt ſuper rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, l quæ æqualia quoque ſunt, fient l 4. primi.
ſectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit ſector BDI, ſectoris BDC, quam eſt multiplex arcus BCI, ipſius arcus BC. Similiter oſtendemus, ſectorem FHL, tam multiplicem eſſe ſectoris FHG, quam multiplex eſt arcus FGKL, ipſius arcus FG. Quoniam vero ſi arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, ſector quoque BDI, ſectori FHL, æqualis eſt, (ut in ſectoribus BDC, CDI, oſtenſum fuit,) & ſi major, major; & ſi minor, minor: Deficient propterea una arcus BCI, & ſector BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & ſectore FHL, æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel una æqualia erunt: vel una excedent; ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. i Quamo- i 6. def.
brem quæ proportio eſt arcus BC, primæ magni- quinti.
tudinis, ad arcum FG, ſecundam magnitudinem, ea erit ſectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad ſectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, &c. Quod demonſtrandum erat.

Com-

Commodius fortasse instituetur demonstratio hoc modo. Sumantur (saltem cogitatione) quotvis circuli æquales circulo ABC, atque in singulis capiantur singuli arcus arcui BC, æquales, quibus insistant anguli tam ad centra, quam ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis BDC, BAC, ob æqualitatem arcuum, quibus insistunt: ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, ut est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus BC. Deinde sumantur etiam quotvis circuli æquales circulo EFG, & in singulis accipiantur singuli arcus arcui FG, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis ABC, EFG, quæ necessario oritur, quando arcus BC, FG, sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt, ut perspicuum est. Nam si arcus essent BCI, FGL, quibus insistunt anguli BDI, FHL, ad centra, & BAI, FEL, ad circumferentias: non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, ut patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, ut diximus.

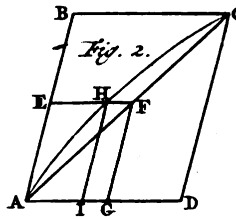
COROLLARIUM.

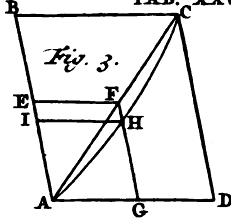
Hinc manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, ut est angulus ad angulum. Utraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. *k* Quare & inter se eædem erunt.

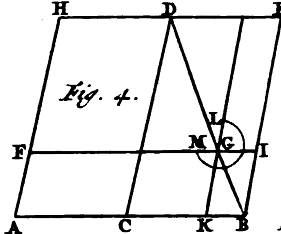
k 11. quint.

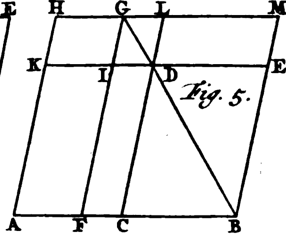
EUCLI-

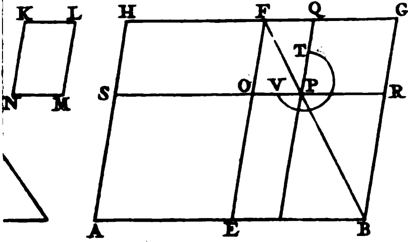
TAB. XXV.

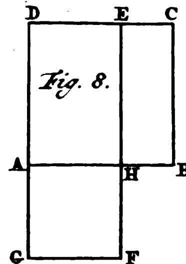

B
C
Fig. 2.
E
H
F
A
I
G
D

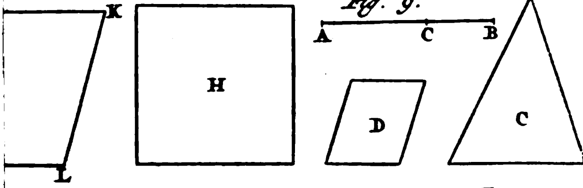

B
C
Fig. 3.
E
F
I
H
A
G
D

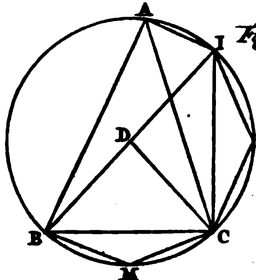

H
D
E
Fig. 4.
L
F
M
G
I
A
C
K
B

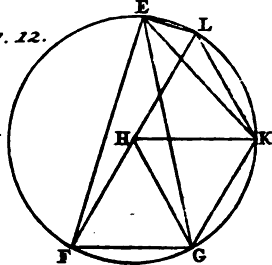

H
G
L
M
K
I
D
E
Fig. 5.
A
F
C
B


K
L
H
F
Q
G
T
S
O
V
P
R
N
M
A
E
B


D
E
C
Fig. 8.
A
H
B
G
F


K
H
Fig. 9.
A
C
B
D
C
L


A
I
D
N
B
C
M
E


Fig. 12.
E
L
H
K
F
G

EUCLIDIS ELEMENTUM UNDECIMUM.

Et solidorum primum.

POstquam Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibique nomen Geometriæ, tanquam proprium, usurpavit; Nunc aggreditur in hoc libro undecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, sive solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.

DEFINITIO. I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

EXplicat autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, sive corpus: nempe tertium genus quantitatis; docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita ut tres dimensiones possideat, unam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemve, appellari

S solidum,

ſolidum, ſive corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantum habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adjicit, ſuperficies vocatur, ut in primo lib. diximus.

Porro quemadmodum Mathematici, ut recte intelligamus lineam, præcipiunt, ut imagininemur punctum aliquod è loco in locum moveri; hæc enim deſcribit veſtigium quoddam longum tantum, hoc eſt, lineam, propterea quod punctum omnis eſt magnitudinis expers; ut autem percipiamus ſuperficiem, monent, ut intelligamus lineam aliquam in tranſverſum moveri; hæc enim deſcribet veſtigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in tranſverſum eſt factus; carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expers: Ita quoque, ut nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina dimenſione præditam, conſulunt, ut concipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter elevari, ſive in tranſverſum moveri; hac enim ratione deſcribetur veſtigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, quæ longa & lata exiſtit; profundum vero ſeu craſſum, propter elevationem illam, ſeu motum ſuperficiei. Hæc ergo quantitas, ſolidum, ſive corpus vocatur.

DEFINITIO. II.

Solidi autem extremum, eſt ſuperficies.

QUemadmodum linea finita in extremitatibus puncta, ſuperficies vero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum eſſe ſuperficiem. Cum enim ſolidum, ſive corpus efficiatur

ex

ex illo motu imaginario superficiei, perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

DEFINITIO. III.

Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

Ut linea recta AB, plano CD, insistens, ita ut B, punctum sit in sublimi extra planum CD, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, ut AB, æqualiter insistat plano CD, & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque deinceps BAH, rectus, ideoque illi æqualis. Eademque ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut AB, cum una linea ex A, in plano CD, educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, ut recte concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere. TAB. XXVI. fig. 1.

DEFINITIO. IV.

Planum ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

TAB. XXVI. fig. 2. *INsistat planum AB, plano CD, itaut linea AQ, sit in sublimi, hoc est, extra planum subjectum CD, at EB, in ipso eodem plano. Sit autem horum planorum communis sectio EB, quæ, ut demonstrabitur propos. 3. hujus lib. recta erit linea. In hac autem sumptis punctis quotcunque G, I; ex ipsis in plano AB, ducantur GF, IH, perpendiculares ad communem sectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in unam partem inclinabit, quam in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis: Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient utrobique à lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in uno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, ut colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in uno eorum*

ad

ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

DEFINITIO. V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta: est, inquam angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

INsistat recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita ut punctum B, sit extra planum in sublimi, punctum vero A, in plano. Deinde ex B, termino sublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adjungatur recta EA; eritque necessario angulus BAE, acutus, a cum in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus sint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehensus linea insistente AB, & adjuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad dictum planum CD; Ita ut tanta dicatur esse inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus est dictus angulus acutus BAE.

TAB. XXVI. fig. 3.

a 17. primi

DEFINITIO. VI.

Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis

punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

TAB. XXVI. fig. 4. *Plano namque AB, insistat planum CD, ita ut pars ad C, sit in sublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipso plano AB, sitque CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem ex ejus puncto F, duæ perpendiculares ducantur, FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita ut tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.*

DEFINITIO VII.

Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

Non obscura est hæc definitio, præcedente bene intellecta. Unde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cujus angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo à recto magis recesserit.

DEFINITIO VIII.

Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

Intellige, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur: hoc est, sive ad dexteram, sive ad sinistram: & sive sursum, sive deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad sini-

sinistram producta conveniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda, quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cujus fastigium intelligatur abscissum, remanentia duo plana non convenient, quamvis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

Sit enim tectum quodpiam BACEDF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cujus basis BCFE, auferaturque fastigium GAHKDI. Quo facto perspicuum est, reliqua plana GBEK, HCFI, non convenire inter se, si ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes GK, HI, conveniant in fastigio AD. Ut igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, ut in nullam partem producta inter se conveniant. *TAB. XXVI. fig. 5.*

DEFINITIO. IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

DEFINITIO. X.

Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

Quod si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur ejusmodi figuræ solidæ non solum similes, verum etiam æquales. Nam

si animo concipiantur sese penetrare mutuo hujusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum.

DEFINITIO. XI.

Solidus angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio.

TAB. XXVI. fig. 6.

DUæ lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum jacentes ad unum punctum conveniunt, efficiunt angulum planum, ut lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, sive corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adjungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ AB, AC, AD, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, jam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui ut mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALI-

ALITER.

Solidus angulus eſt, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis, continetur.

HÆc definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti recte intellecta. Cum enim ſaltem tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cum minimum tres planos angulos requiri, ut angulus ſolidus efficiatur, ut ex ipſa figura apparet. Angulus enim BAD, in plano eſt, in quo rectæ AB, AD, & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC, angulus denique CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB, atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad unum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus ſolidus, ſed totus quidam angulus planus. Neque vero ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diverſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Unde neceſſe eſt, ut tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbent duo parietes cum pavimento domus, vel laqueari, ad unum punctum convenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Ubi manifeſtum eſt, ſi una earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanereque tantum duas ſuperficies ad invicem inclinatas, & hiantes.

TAB. XXVI. fig. 6.

DEFINITIO. XII.

Pyramis est figura solida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum constituta.

TAB. XXVI. fig. 7, 8, 9. *Videlicet figura solida à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, constituta appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad unum punctum tendant, excepto plano, à quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; ut videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Unde & planum hujusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Ut pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.*

DEFINITIO. XIII.

Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero parallelogramma.

TAB. XXVI. fig. 10, 11, 12. *Figura scilicet solida, quarum plana adversa & æqualia, & similia, & parallela sunt, vel triangula sint ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH:*

EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG, dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quam columna quædam laterata æqualis crassitudinis, cujus bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, sive hæ sint triangula, sive quadrangula, sive pentagona, &c. Unde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, sive anguli, in uno quoque oppositorum planorum reperiuntur, ut figuræ indicant.

DEFINITIO. XIV.

Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus revolvitur, unde moveri cœperat, circumassumpta figura.

Sicut linea recta circa alterum ejus extremum quiescens revoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum ejus extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometræ sphæram appellant. Unde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existunt illi lineæ circumvolutæ: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.

Sphæra

Sphæra est figura solida, una superficie comprehensa, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFINITIO. XV.

Axis autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

DEFINITIO. XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi.

DEFINITIO. XVII.

Diameter autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.

HÆ tres definitiones non egent expositione, dummodo hoc solum notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra revolvatur. Unde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominavit.

DEFINITIO. XVIII.

Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se

ſe ipſum rurſus revolvitur, unde moveri cœperat, circumaſſumpta figura.

Atque ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero major, Oxygonius.

UT ſi triangulum rectangulum ABC, circa latus quieſcens AB, quod eſt circum rectum angulum, circumducatur, donec integram revolutionem expleat, deſcribetur ſolida quædam figura, quæ continetur duabus ſuperficiebus, circulari una ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, ſuo motu deſcribit: & curva alia, eaque convexa, quam latus AC, recto angulo oppoſitum delineat. Hæc igitur figura ſolida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat. TAB. XXVI. fig. 13, 14, 15.

Quod ſi latus quieſcens AB, æquale fuerit circumducto BC, ut in figura 13. dicetur conus deſcriptus Orthogonius, ſeu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus eſt. Cum enim latera AB, BC, ponuntur æqualia; a *erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquivaleant uni recto, eo quod ABC, rectus eſt, erit angulus BAC, ſemirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte oppoſita ſemirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quieſcens latus AB, minus fuerit circumducto BC, ut in figura 14. vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet angulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cum enim BC, latus latere AB, ſit majus;* b *erit angulus BAC, major angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant uni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, ſemi-*

a 5. primi

b 18. primi

ſemirecto major. Similiter BAD, major erit ſemirecto; atque adeo totus CAD, recto major erit. Si denique quieſcens latus AB, majus fuerit circumducto BC, ut in figura 15. appellabitur conus deſcriptus Oxygonius, ſeu acutangulus, quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cum enim la-
c 18 primi *tus AB, majus ſit latere BC, c erit angulus BCA, angulo BAC, major. Quapropter cum hi duo uni recto æquivaleant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, ſemirecto major, ideoque reliquus BAC, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus BAD, minor eſſe ſemirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.*

DEFINITIO. XIX.

Axis autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

TAB. XXVI fig. 13, 14, 15.

UT in quolibet cono ſuperius deſcripto axis eſt recta quiſcens AB.

DEFINITIO. XX.

Baſis vero coni eſt circulus, qui à circumducta linea recta deſcribitur.

TAB. XXVI. fig. 13, 14, 15.

NImirum circulus CD, qui deſcribitur ab altero latere circa rectum angulum, quale eſt BC, in ſuperioribus conis. Itaque hujus circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.

DEFI-

DEFINITIO. XXI.

Cylindrus eſt, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſe ipſum rurſus revolvitur, unde cœperat moveri, circumaſſumpta figura.

Veluti ſi rectangulum parallelogrammum ABCD, circa latus quieſcens AB, circumvolvatur, donec integram expleat revolutionem, appellabitur figura deſcripta DCFE, cylindrus, quæ quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus DE, & CF, quas latera AD, BC, deſcribunt; & altera curva, eaque convexa, quam latus CD, deſcribit, inſtar columnæ alicujus rotundæ. Unde factum eſt, ut Campanus cylindrum appellaverit columnam rotundam. TAB. XXVI. fig. 16.

DEFINITIO. XXII.

Axis autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

Nempe recta AB, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri. TAB. XXVI. fig. 16.

DEFINITIO. XXIII.

Baſes vero cylindri ſunt circuli à duobus adverſis lateribus, quæ circumaguntur, deſcripti.

Quales ſunt circuli DE, & CF, à lateribus AD, BC, oppoſitis deſcripti. TAB. XXVI. fig. 16.

DEFI-

DEFINITIO. XXIV.

Similes coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

Recte Euclides ſimilitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & baſium diametris ſumit. Diametri enim baſium indicant conos & cylindros ſecundum duas dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinem ſcilicet ac latitudinem; Axes vero eoſdem ſecundum profunditatem, ſeu altitudinem ſimiles eſſe demonſtrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri: in conis autem axes AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, ut axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter baſis ad FG, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundum longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundum profunditatem, ut diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum revolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum converſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cum enim ſit ut AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem ut BC, ad FG, a ita dimidia BD, ad dimidiam FH: erit quoque ut AD, EH, ita DB, ad HF: & permutando ut AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula, & rectangula ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem,

f TAB. XXVI. fig. 17, 18.

a 15. quint.

dem, b *propterea quod triangula unum angulum uni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula sunt*, c *ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter se similia existunt: Rectangula vero*, d *eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, sunt æqualia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.* b 6. *sexti* c 5. *sexti* d 34. *primi*

DEFINITIO. XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

DEFINITIO. XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DEFINITIO. XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DEFINITIO. XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

DEFINITIO. XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

H*Æc sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur*

tur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, ut ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ simplicia à Philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat.

DEFINITIO. XXX.

[Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex adverso, parallelæ sunt contenta.]

TAB. XXVII. fig. 1. *Veluti solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum opposita AC, FH; Item DF, CG; Item AG, DH, sunt parallela, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa, quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, ut demonstrabitur propos. 24. hujus lib.*

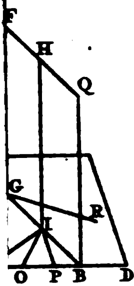
DEFINITIO. XXXI.

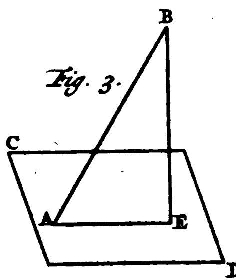
[Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.]

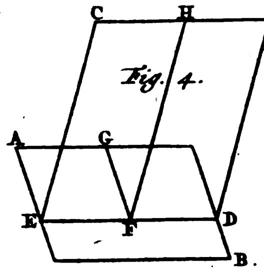
DEFINITIO. XXXII.

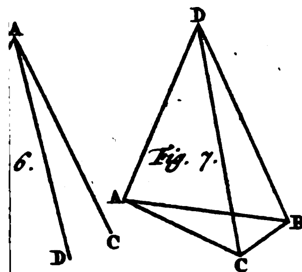
[Solida figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscrip-

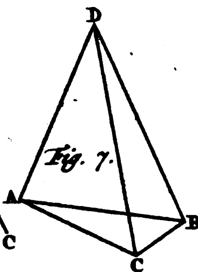
TAB. XXVI.

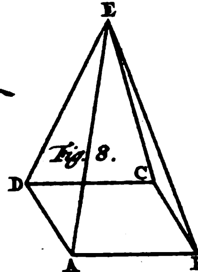

F
H
Q
G
R
I
O
P
B
D

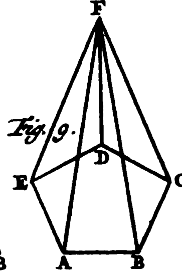

B
Fig. 3.
C
A
E
D

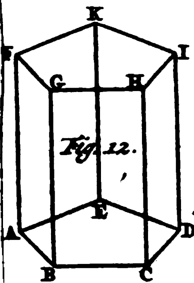

C
H
Fig. 4.
A
G
E
F
D
B.

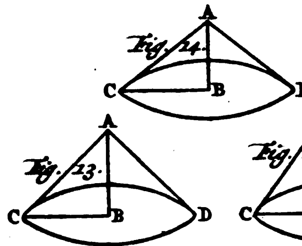

A
6.
D
C

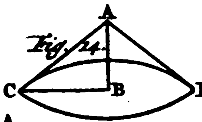

D
Fig. 7.
A
B
C

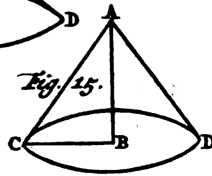

E
Fig. 8.
D
C
A
B

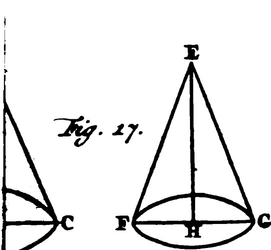

F
Fig. 9.
D
E
C
A
B

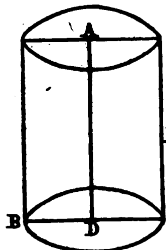

K
F
I
G
H
Fig. 12.
E
A
D
B
C

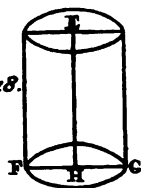

A
Fig. 13.
C
B
D


A
Fig. 14.
C
B
D


A
Fig. 15.
C
B
D


E
Fig. 17.
C
F
H
G


A
B
D
C


Fig. 18.
E
F
H
G

ſcriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam deſcribitur.]

Non eſt neceſſe, ut anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, ut omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita ut nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi.

Sit enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in ſubjecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita ut omnia puncta partis AC, in plano DE, jaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. Quod eſt abſurdum, ex pronunciatio 10. lib. 1. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubjecto plano, quædam vero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum. *TAB. XXVII. fig. 2.*

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, in uno ſunt plano. Atque triangulum omne in uno eſt plano.

Rectæ lineæ AB, CD, ſe mutuo ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, ut- *TAB. XXVII. fig. 3.*

utcumque, ducatur recta FG, ut fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in uno esse plano; Item rectas AB, CD, in uno quoque plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirum EHIG, in plano uno exstat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contra, existent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in uno plano, partes vero HF, IF, in sublimi, vel contra quod fieri non
a 1. und. posse, jam supra *a* demonstratum est. Quod si ejusdem trianguli pars quidem EFIK, in uno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in uno plano, partes vero KG, IG, in sublimi, vel contra. Si denique ejusdem trianguli pars quidem FHKG, in uno concedatur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in uno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel con-
b 1. und. tra. Quæ omnia absurda sunt, *b* ut est demonstratum. Quare triangulum EFG, in uno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

Quia vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt ejus latera EF, EG: In quo
c 1. und. autem sunt rectæ EF, EG: *c* in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in uno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demonstravimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in uno sunt plano. Atque triangulum omne in uno est plano. Quod erat demonstrandum.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

TAB. XXVII. fig. 4. SEcent se mutuo plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam

neam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, ex 14. pronunciato 1. lib. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

Aliter. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in utroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cum eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EHF; includent iterum duæ rectæ EF, EHF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in utroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

Si recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat. Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

Recta linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cum enim se mutuo secent in B; *a* erunt ipsæ in uno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; item rectæ BI, BK; ducanturque rectæ GK, IH; & in *TAB. XXVII. fig. 5.* *a 2. und*

in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; *b* & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales: *c* Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.

b 15. primi
c 4. primi

Rursus *d* cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL; trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adjacent æqualia, ex constructione. *e* Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

d 15. primi
e 26. primi

Præterea cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, *f* erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

f 4. primi

Amplius quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis, *g* erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales.

g 8. primi

Itaque cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, ut hactenus demonstravimus; *h* erunt quoque bases AL, AM, æquales.

h 4. primi

Quoniam denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; *i* erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta

i 8. primi

cta LM, quæ in plano subjecto ipsam tangit in B; Eademque ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta G, I, & K, H, ductæ sint, dummodo rectæ GI, KH, jungantur; vel certæ literæ disponantur, ut prius, quemadmodum in hac figura apparet, ubi eædem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dexteram, ut in figura quinta, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. hujus lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat. *TAB. XXVII. fig. 6.*

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in uno sunt plano.

INsistat recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in uno plano esse. *a* Cum enim quælibet duæ in uno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. *b* Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in uno sunt plano, cum se mutuo secent in B, sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. *c* Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; *d* erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos

TAB. XXVII. fig. 7.

a 2. *und.*

b 2. *und.*

c 3. *und.*

d 4. *und.*

angulos erit rectæ BG, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. hujus lib. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in uno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

VI. THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

TAB. XXVII. fig. 8. Sint duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. hujus lib. Jam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; *a* erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA. Est autem & basis communis AG, *b* erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. hujus lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. *c* Quare rectæ DB, DA, DC, in uno erunt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: *d* Est autem AB, in eodem plano, in

a 4. primi
b 8. primi
c 5. und.
d 2. und.

in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti; *e* erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum. *e 28. primi*

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis AB, CD, sumantur utcunque duo puncta E, & F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra, secet jam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, *a* quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cum habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. *b* Quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum. *TAB. XXVII. fig. 9.* *a 3. und.* *b 10. pron.*

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SInt parallelæ rectæ AB, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem *TAB. XXVII. fig. 10.*

eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF, erit per defin. 3.
a 29. primi hujus lib. angulus CDB, rectus: *a* Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Jam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturque æquales BG, CD. Conjungantur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex constructione, & anguli quoque ipsis contenti CDB, GBD, æquales, nimi-
b 4. primi rum recti: *b* Erunt bases CB, GD, æquales; Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli GBC,
c 8. primi & basis est communis CG. *c* Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex definitione 3. hujus lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuo secantibus in B. (Si namque producerentur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD,) ad rectos angu-
d 4. und. los existit; *d* ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc
e 7. und. eodem plano recta AB; *e* propterea quod rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cum puncta B, C, D, existant in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex definitione 3. hujus lib. Quare cum AB, recta sit ad rectas
f 4. und. BG, BD; *f* erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

ix. THEOR. 9. PROPOS. 9.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed

ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

SInt rectæ AB, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoque eſſe. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipſam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI, in plano parallelarum CD, EF. Quoniam igitur EG, recta eſt ad duas rectas GH, GI, ſe tangentes mutuo in G; *a* erit recta quoque ad planum per ipſas GH, GI, ductum. Quamobrem cum ſint parallelæ AB, EF, & EF, ſit recta ad planum per GH, GI, ductum; *b* erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cum ſint parallelæ CD, EF, ſit autem EF, recta ad planum per GH, GI, ductum; *c* erit etiam CD, recta ad idem planum; *d* Atque proinde rectæ AB, CD, cum rectæ ſint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano, hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

TAB. XXVII. fig. 11.

a 4. und.

b 8. und.

c 8. und.

d 6. und.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

SInt rectæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, ſe tangentibus in D; non ſint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipſis comprehenſos eſſe æquales. Ponantur enim AB, DE, inter ſe æquales, & AC, DF, inter ſe, ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ ſunt & æquales;

TAB. XXVII. fig. 12.

a 33. primi quales; *a* erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, paral-
b 9. und. lelæ & æquales sint eidem AD, *b* erunt etiam
c 33. primi BE, CF, inter se parallelæ & æquales; *c* Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqua-
d 8. primi lis, ut modo demonstravimus; *d* Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

xi. PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

TAB. XXVII. fig. 13. Sit à puncto A, in sublimi ad subjectum planum BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta utcunque DE, *a* ad quam ex
a 12. primi A, deducatur perpendicularis AF. *b* Et in plano
b 11. primi BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur
c 12. primi GH, *c* ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum
d 31. primi subjectum BC. *d* Ducta enim in plano BC, per I, ipsi DE, parallela KL, cum DF, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione,
e 4. und. *e* ac proinde recta ad planum per FA, FH, du-
f 8. und. ctum, *f* erit quoque KI, ad idem planum per
g 2. und. FA, FH, ductum recta. *g* Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitque rectam KI, in I; erit per definitionem 3. hujus lib. angulus KIA, rectus; atque adeo AI,
h 4. und. ad rectos angulos erit duabus KI, IF. *h* Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xij.

Dato plano à puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

Sit à dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC, *a* Ex quovis puncto D, in sublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensâ recta per E, & A, *b* ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datum BC. Cum enim DE, AF, parallelæ sint; & DE, recta ad planum BC, ex constructione: *c* erit quoque AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

TAB. XXVII. fig. 14.
a 11. und.
b 31. primi
c 8. und.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xiij.

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

Sit datum planum AB. Dico à dato ejus puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB, & per CD, CE, *a* quæ in uno, eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. hujus lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales pars, & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos

TAB. XXVII. fig. 15.
a 2. und.

ctos

ctos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

Aliter. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem
b 6. und. planum AB; *b* erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conveniant in puncto C. Quod est absurdum.

xiv. THEOR. 12. PROPOS. 14.

Ad quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

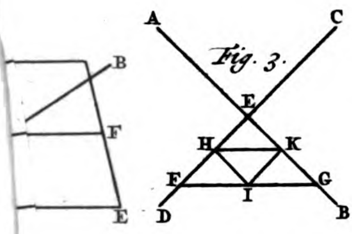
TAB. XXVIII. fig. 1. SIt recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se con-
a 3. und. venient. Conveniant ad partes C, E, *a* & faciant communem sectionem rectam lineam GH; In qua sumpto puncto utcunque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. hujus lib. duo anguli IAB,
b 17. primi IBA, recti, in triangulo ABI. *b* Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conveniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

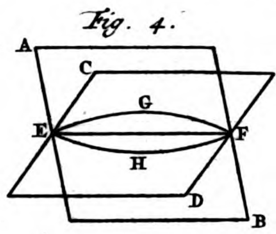
xv. THEOR. 13. PROPOS. 15.

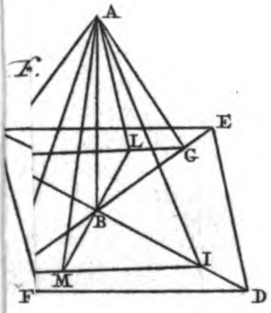
Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, per quæ illa ducuntur, plana.

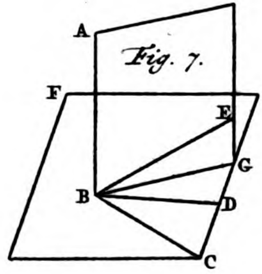
TAB. XXVIII. fig. 2. SInt duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se

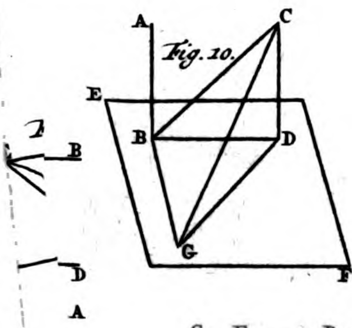
TAB. XXVII.

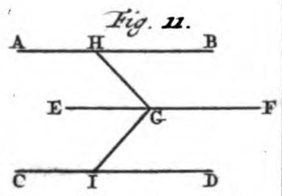

B
F
E
A
C
Fig. 3.
E
H
K
F
G
I
D
B

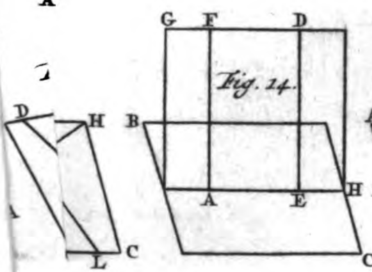

Fig. 4.
A
C
G
E
F
H
D
B

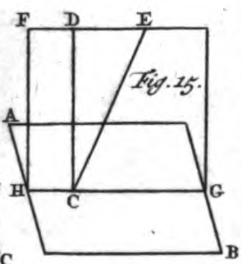

A
E
L
G
B
I
M
F
D


A
Fig. 7.
F
E
G
B
D
C


A
C
Fig. 10.
E
B
D
B
G
D
F


Fig. 11.
A
H
B
E
G
F
C
I
D


A
G
F
D
Fig. 14.
D
H
B
H
A
E
C
L
C


F
D
E
Fig. 15.
A
H
C
G
B

se tangentibus in D, existentibusque in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, *a* enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. *b* Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; *c* erunt & AB, GH, inter se parallelæ. *d* Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. hujus lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC, *e* recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. *f* Igitur parallela sunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

a 11. und.
b 31. primi
c 9. und.
d 29. primi
e 4. und.
f 14. und.

SCHOLIUM.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

Datum planum sit AB, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur utcunque duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, f agatur CE, ipsi DB, parallela. Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallelæ sint, g parallela erunt plana AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.

TAB. XXVIII. fig. 3.
f 31. primi
g 15. und.

THEOR.

xvi. THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.

TAB. XXVIII. fig. 4. SEcentur plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GF, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se convenient, cum sint in plano EF, secante. Conveniant igitur in puncto I. a 1 und. a Quia ergo tota recta HEI, in uno est plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in uno quoque est plano, videlicet in CD, producto; convenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

xvij. THEOR. 15. PROPOS. 17.

Si duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

TAB. XXVIII. fig. 5. REctæ lineæ AB, CD, secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, ut quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & conjungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, a 2 und. in eodem plano GH. a Eritque triangulum LNQ, in uno plano: similiter triangulum LOQ, in uno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, b 16 und. secantur plano trianguli LNQ, b erunt communes

nes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. *c* Quam ob rem erit ut LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item ut LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde ut LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum. c 2. sexti.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xviij.

Si recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Sit recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, utcunque in recta FG, *a* ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt; & AB, ponitur recta ad planum CD; *b* erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. hujus lib. ad communem sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. hujus lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. hujus lib. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

TAB. XXVIII. fig. 6.

a 31. primi.

b 8. und.

THEOR. 17. PROPOS. 19. xix.

Si duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis

etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

TAB. XXVIII. fig. 7. Sint duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. a 4. und. Si recta est EF, ad BF, DF, *a* recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. hujus lib. Idem concludes si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. hujus lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur b 11. primi recta; *b* ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem ejus sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem ejus sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. hujus lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri c 13. und. non posse supra *c* demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet ut ut assumpti tertio sunt majores.

Contineatur angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse majores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosvis duos majores esse reliquo: Si vero duo tantum sint æquales, & tertius utrovis minor; constat quoque quoslibet duos reliquo majores esse. Quod si unus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem sive æquales, sive inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse majorem. Dico jam hoc angulo maximo BAC, majores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto *a* fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ, AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; conjunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem æquales; *b* erunt bases BD, BE, æquales. *c* Quia vero latera DB, DC, majora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, major quam CE. Cum igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, major base CE; *d* erit angulus CAD, angulo CAE, major. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, majores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo majores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus

TAB. XXVIII. fig. 8.

a 23. primi

b 4. primi

c 20. primi

d 25. primi

angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

xxi. THEOR. 19. PROPOS. 21.

Omnis solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

TAB. XXVIII. fig. 9. Sit angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC. *a* Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, majores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, majores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, majores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, majores. *b* Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt majores. Cum igitur sex illi, una cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, (*c* sunt enim anguli cujuslibet trianguli duobus rectis æquales) si auferantur sex illi duobus rectis majores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 20. *und.*
b 32. *primi*
c 32. *primi*

xxij. THEOR. 20. PROPOS. 22.

Si fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet assumpti reliquo sint majores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri

fieri poteſt, ut ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.

Sint tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo ſint majores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua eſſe majores. Nam hoc poſito, *a* ex ipſis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, majores ſint, quam HI, ita oſtendetur. *b* Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primum AK, ad partes AD, ita ut fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compoſitus; quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur AK, ipſi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contenti DAK, & B, æquales; *c* erunt & baſes KD, FG, æquales. Rurſus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia ſunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, major angulo C, propterea quod duo anguli DAE, & B, majores ponuntur angulo C; *d* erit & baſis EK, major baſe HI: *e* ſunt autem rectæ ED, DK, majores recta EK. Igitur multo majores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, majores quam HI. Quod eſt propoſitum.

TAB. XXVIII. fig. 10.

a 22. *primi*
b 23. *primi*
c 4. *primi*
d 24. *primi*
e 20. *primi*

Cadat deinde AK, in rectum & continuum ipſi AE: quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturque AK, ipſi AD, æqualis rurſum, & connectatur recta KD. *f* Erit, igitur ut prius KD, ipſi FG, æqualis. *g* Quoniam vero rectæ ED, DK, majores ſunt recta KE, & KE, æqualis eſt rectis CH, CI, ex hypotheſi, & con-

TAB. XXVIII. fig. 11.

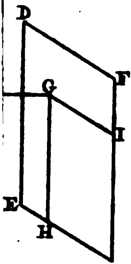
f 4. *primi*
g 20. *primi*

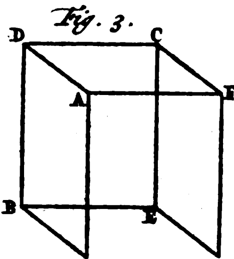
ſtructione; erunt quoque ED, DK, majores
b 20. primi duabus CH, CI: *b* Hæ autem majores ſunt,
quam HI. Igitur multo majores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoque DE, FG, majores quam HI. Quod eſt propoſitum.

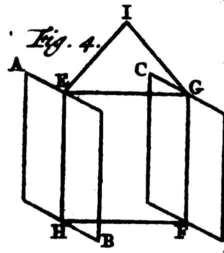
TAB. XXIX. fig. 1. Cadat poſtremo AK, ad partes AE, ita ut nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta ſit EAK; quod demum eveniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt majores. Ponaturque rurſum AK, ipſi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE.
i 4. primi *i* Erit igitur, ut prius, KD, ipſi FG, æqualis.
k 21. primi *k* Quoniam vero duæ DE, DK, majores ſunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypotheſi & conſtructione; erunt quoque DE, DK, majores quam CH, CI:
l 20. primi *l* Hæ autem majores ſunt, quam HI. Igitur multo erunt majores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æquales ipſi FG; erunt quoque DE, FG, majores quam HI, quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus DE, HI, majores eſſe, quam FG, ſi angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, majores, quam DE, ſi angulo C, ad FB, conſtituatur angulus æqualis, &c.
m 22. primi *m* Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum conſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod demonſtrandum erat.

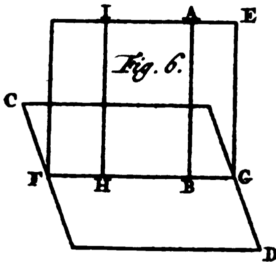
TAB. XXIX. fig. 2. Aliter. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales; *n* erunt quoque baſes DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua majores.
n 4. primi Si vero duo tantum anguli ſunt æquales, & ter-
o 4. primi tius minor; *o* erunt quoque duæ illorum baſes
p 24. primi æquales, *p* & baſis tertii utraque minor: Quare rurſus quælibet duæ majores erunt reliqua. Quod ſi unus eorum, nempe A, ſit maximus, ſive reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſive inæ-
q 24. primi quales; *q* erit quoque baſis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, majores erunt quam HI: Item, DE, HI, majores quam FG. Dico jam

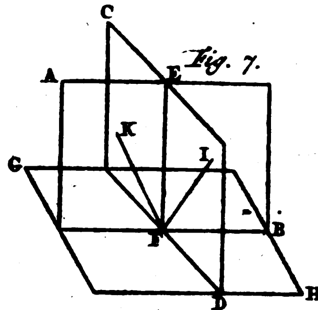
&

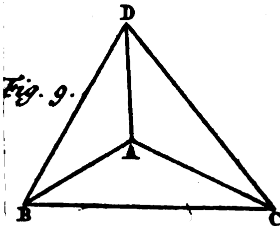

D
F
G
I
E
H

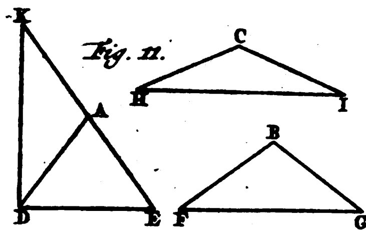

Fig. 3.
D
C
A
F
B
E

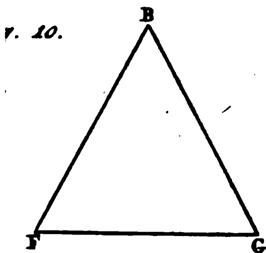

I
Fig. 4.
A
E
C
G
H
B
F
D

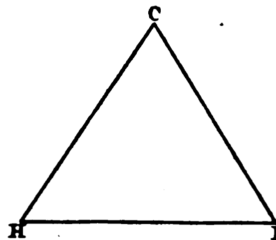

I
A
E
Fig. 6.
C
F
H
B
G
D


C
Fig. 7.
A
E
K
L
G
F
B
D
H


D
Fig. 9.
A
B
C


K
Fig. 11.
C
H
I
A
B
D
E
F
G


Fig. 10.
B
F
G


C
H
I

& rectas FG, HI, majores esse recta DE. r Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad intervallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, majores ponuntur angulo DAE, & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, major reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; s erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE, & angulus C, ostensus major angulo KAE; t erit & basis HI, major base KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG, erunt FG, HI, majores quam DK, KE. u Sed DK, KE, majores sunt, quam DE. Igitur multo majores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

r 23. primi

s 4. primi

t 24. primi

u 20. primi

PROBL. 3. PROPOS. 23.

xxiij.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt majores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

Sint tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, ut quilibet duo sint majores reliquo. Oportet jam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturque

TAB. XXIX. fig. 3.

a 22. und. turque bases DE, FG, HI. *a* Fieri ergo potest, ut ex DE, FG, HI, triangulum constituatur. Constituatur ex ipsis igitur triangulum KLM, sitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ
b 5. quart. FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. *b* Describatur circa triangulum KLM, circulus, cujus centrum N, à quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. major qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, ut ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, majores non credantur, quam NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli NKL; & basis DE,
c 8. primi basi KL, æqualis: *c* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex corol. propos. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neque minores. Si enim minores sint AD, AE, quam NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quoniam igitur est ut NK, ad NO, ita NL, ad NP, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia; erunt latera NK, NL, tri-
d 2. sext. anguli NKL, secta proportionaliter, *d* ac proinde
e 29. primi OP, ipsi KL, parallela erit. *e* Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangu-
f 4. sext. lum. *f* Igitur erit ut NK, ad KL, ita NO, ad
g 14. quint. OP. Est autem NK, major quam NO. *g* Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, major erit, quam OP. Quocirca cum la-

tera

tera AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, major base OP, *h* erit & angulus A, major angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, major esse ostendetur. Cum igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex corol propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, majores quatuor rectis. Quod est absurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales. Igitur majores.

h 25. primi

Cadat deinde centrum N, in latus LM, quod tum continget, quando triangulum KLM, angulum LKM, habuerit rectum, ut ex eodem corol. propos. 5. lib. 4. manifestum est. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK, NL; erunt quoque BF, BG, æquales eisdem NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Posita autem fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque sunt rectæ FG. *i* Sunt autem & majores BF, BG, quam FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quam NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdum, *k* cum sint majores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur majores.

TAB. XXIX. fig. 4.

i 20. primi

k 20. primi

Cadat postremo centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, ut ex corol. dicto propos. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicantur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum & basis DE, basi KL, ponatur æqualis; *l* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit.

TAB. XXX. fig. 1.

l 8. primi

Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo majores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit major. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis; *m* erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & majorem ostendimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quam NK, NL; si abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP, demonstrabitur, ut in primo casu, angulus A, major angulo ONP; & eadem ratione angulus C, major angulo KNM. *n* Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturque NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR, cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transit circumferentia circuli ex N, ad intervallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. *o* Quare cum angulus PON; æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eodem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, major erit. Quoniam verò latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem; *p* erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa jam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR, & angulus LKM, major angulo QOR, ut ostendimus: *q* erit basis LM, hoc est, FG, major base QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & basis FG, major base QR; *r* erit

m 8. primi

n 23. primi

o 29. primi

p 4. primi

q 24. primi

r erit angulus B, major angulo QNR. Rursus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, majores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, major erit angulo B. Quod est absurdum, cum B, ostensus sit major angulo QNR. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur majores. r 25. primi

Jam vero, cum rectæ AD, AE, majores sint rectis NK, NL, ubicunque centrum N, existat; possit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma annexum, ita ut quadratum rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T. s Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3. hujus lib. ad rectas NK, NL, NM, t ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti; u erit basis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem, cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE; x erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, conti-

TAB. XXIX. fig. 3, 4. TAB. XXX. fig. 1.
s 12. und.
t 47. primi
u 4. primi
x 8. primi

continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo major plus potest, quam minor.

TAB. XXX. fig. 2. *Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, major, oporteatque invenire, quo AB, plus possit quam C. Divisa AB, bifariam in D, describatur ex centro D, & intervallo DA,*
a 1. quart. *vel DB, semicirculus AEB, a in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, jungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ*
b 31. tertii. *EB. b Cum enim angulus E, in semicirculo rectus*
c 47. primi *sit; c erit quadratum ex AB, æquale quadratis AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc est, quam C, quadrato rectæ EB. Quod est propositum.*

xxiv. THEOR. 21. PROPOS. 24.

Si solidum parallelis planis contineatur; adversa illius plana, parallelogramma sunt similia & æqualia.

TAB. XXIX. fig. 5. Sit parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum juxta defin. 30. hujus lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum adversæ quælibet sint parallelæ. Dico quævis opposita plana esse parallelogramma similia, & æqualia. Cum enim parallela plana BG, CF, secentur plano
a 16. und. AC; a Erunt communes sectiones AB, CD, paral-

parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ. Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico jam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; *b* erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. *c* Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit ut AB, ad BH, ita DC, ad CE. Ac propterea ut BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis jam diametris AH, DE, *d* cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; *e* & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, ut ostensum est, *f* erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. *g* Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, adversa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia, &c. Quod erat demonstrandum.

b 10. und.

c 34. primi

d 34. primi

e 10. und.

f 4. primi

g 34. primi

THEOR. 22. PROPOS. 25. XXV.

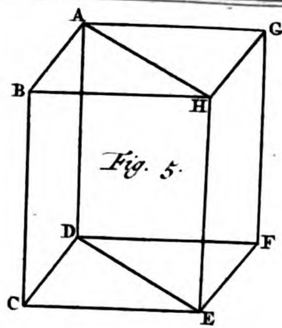
Si solidum parallelepipedum plano secetur adversis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

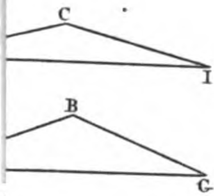
SEcetur parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico ut est

TAB. XXX. fig. 3.

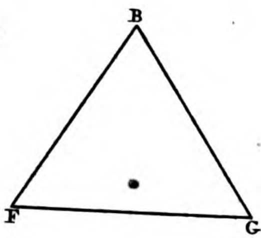
est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in utramque partem quantumlibet, sumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium propos. 15. hujus lib. Quoniam igitur solidum AEFD, continetur planis parallelis ex hypothesi; a 24. und. ipsum parallelepipedum erit, ex definitione, *a* habebitque plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP, EBCF, BMRC, MNSR, NOTS, ELQF, EOTF; habebuntque plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. b 36. primi *b* Quoniam vero parallelogramma AG, KV, LX, cum sint super æquales bases AE, AK, KL, c 29. primi æqualia sunt; & similia quoque *c* cum anguli unius sint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos unius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoque proportionalia. Eademque ratione æqualia & similia sunt parallelogramma AY, KZ, La. Cum igitur æqualia quoque sint, & similia parallelogramma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AEFD, æqualia, & similia tribus planis KV, KZ, KP, solidi AKPD, & tribus planis LX, La, LQ, d 24. und. solidi KLQP: *d* Sunt autem tria in unoquoque solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodem, nempe AG, ipsi ZF; & AY, ipsi VF; & AD, ipsi EF, &c. Igitur per defin. 10. hujus lib. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia ostendentur solida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quam multiplex est basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum LEFQ, solidi AEFD. Et quam multiplex est basis OG, basis BG, tam multiplex erit solidum OEFT, solidi BEFC. Quoniam vero si basis LG, (multiplex

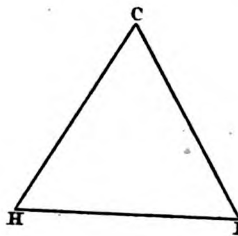
TAB. XXIX.

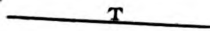


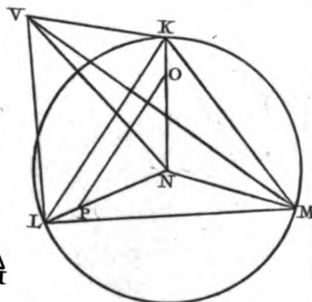


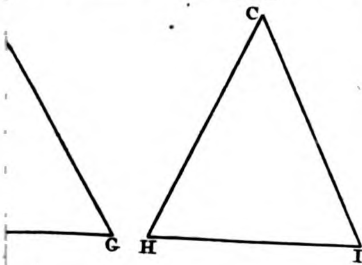
2.

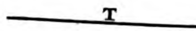


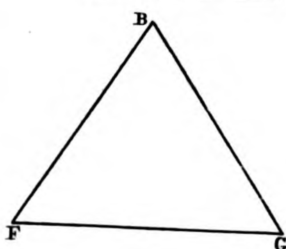


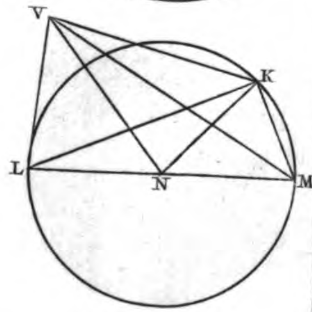












tiplex basis AG, primæ magnitudinis,) æqualis est basi OG, (multiplici basis BG, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD, tertiæ magnitudinis) solido OEFT, (multiplici solidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus LG, OG, æqualibus existentibus, æqualia quoque sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ, sex parallelogrammis solidi OEFT: Si autem basis major est base, solidum quoque solido majus est; & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. ut basis AG, prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinem, ita solidum AEFD, tertia magnitudo, ad solidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, ut est basis DY, ad basim CY, & ut basis AY, ad basin BY, & ut basis DG, ad basin, CG. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

PROBL. 4. PROPOS. 26. xxvi.

Ad datam rectam lineam, ejusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

Sit ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano existentibus. *a* Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, ductum perpendicularis FG, connectanturque rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, *b* fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ducto constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. *c* Ex L, vero

TAB. XXX. fig. 4.

a 11. und.

b 23. primi

c 12. und.

ro ad planum, in quo sunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & conjungatur recta KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cum latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per constructio-

d 4. primi nem; *d* Erunt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE,

e 4. primi trianguli CGE, per constructionem; *e* æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli, HLK, DGF, recti ex defin. 3. hujus lib.

f 4. primi *f* erunt & bases HK, DF, æquales. Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, sint æqualia lateribus CD, CF, trianguli CDF, ex constructione, (cum enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia sint ex constructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos,

g 4. primi ex defin. 3. hujus lib. *g* erunt bases AK, CF,

h 8. primi æquales.) *h* Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, sunt æqualia lateribus GE, GF, & anguli ILK, EGF,

i 4. primi recti ex defin. 3. hujus lib. *i* Erunt bases IK, EF, æquales: Cum igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF,

k 8. primi sint æqualia ex constructione; *k* erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum solidum C, componentibus. Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, ejusque punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

PROBL.

PROBL. 5. PROPOS. 27. xxviij

A Data recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIt à data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. *a* Fiat ad rectam AB, ejusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita ut tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis, ECG, GCF, FCE. Deinde ut est CF, ad CG, *b* sic fiat AB, ad AI, & ut CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, ut CF, ad CE, ita AB, ad AH. Post hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H. ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterque positum. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe ut BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione, erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma HI, EG, & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, solidi AK, similia sunt, similiterque posita tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. *c* Sunt autem tria cujuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi CD. Ac proinde ex defin. 9. hujus lib. similia sunt, similiterque posita solida AK, CD. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedum simile, & similiter positum descripsimus. Quod erat faciendum.

TAB. XXX. fig. 5.
a 26. und.
b 12. sext.
c 24. und.

X THEOR.

xxviij. THEOR. 23. PROPOS. 28.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios adversorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

TAB. XXX. fig. 6. SIt parallelepipedum AB, in quo plana opposita sint AH, EB, quorum diagonii, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur
a 34. primi utraque CD, GF, parallela est, *a* & æqualis ipsi
b 9. und. AE, cum sint parallelogramma CE, GE; *b* erunt
c 33. primi & inter se parallelæ, & æquales CD, GF. *c* Ac proinde, quæ ipsas conjungunt CG, DF, parallelæ erunt & æquales, ideoque in uno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare
d 24. und. bifariam parallelepipedum AB. *d* Cum enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG,
e 6. sext. FED, DBF, proportionalia. *e* Igitur similia quo-
f 24. und. que erunt dicta triangula. *f* Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGCDBF, proptereaque prismata æqualia erunt, ex defin. 10. hujus lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

xxix. THEOR. 24. PROPOS. 29.

Solida parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insi-

insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis, sunt inter se æqualia.

Super basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se æqualia. *a* Cum enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM. *b* Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ in corollario 8. propos. lib. 1. ostendimus; *c* Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. *d* Rursus parallelogrammum AC, æquale est & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG: *e* Sed & IF, ipsi LG, æquale est cum bases IK, LM, sint æquales. (*f* Nam cum rectæ, IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoque inter se æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. hujus lib. æqualia erunt dicta prismata; *g* Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

TAB. XXX. fig. 7.

a 35. primi

b 34. primi

c 4. sexti.

d 24. und.

e 36. primi

f 34. primi

XXX. THEOR. 25. PROPOS. 30.

Solida parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

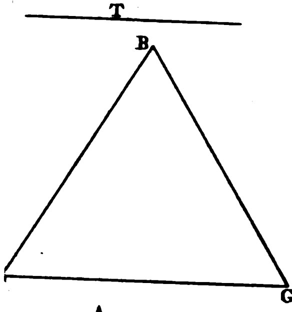
TAB. XXXI. fig. 1. SUper baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, non ſint in eiſdem rectis, hoc eſt, neque CI, GD, protractæ tranſeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, eſſe æqualia. Cum enim plana CD, EF, oppoſita baſi AB, ſint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, ſecet EM, LF, protractæ in punctis N, O; Et ID, eaſdem in punctis P, Q; adjunganturque rectæ AN, KO, HP, BQ. a Quia igitur rectæ PQ, MF, ſunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipſi HB, eſt æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. b Igitur & HP, BQ, parallelæ ſunt & æquales, ideoque parallelogrammum eſt HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Eſt autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum eſt APQK. c Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale eſt parallelepipedo APQK, cum utriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſunt in rectis eiſdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, quum utriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter ſe ſun

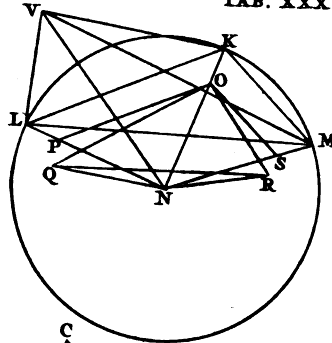
a 34. primi

b 33. primi

c 29. und.

TAB. XXX.





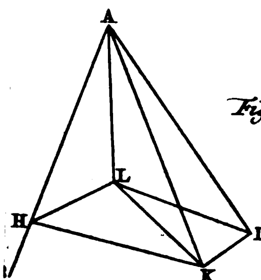
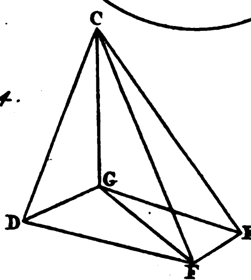
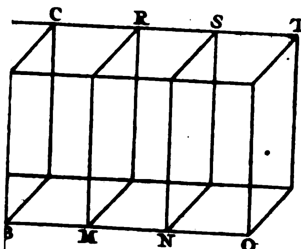


Fig. 4.





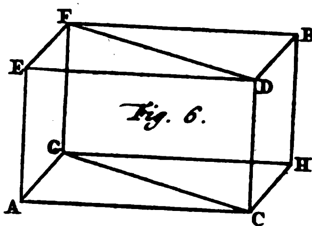
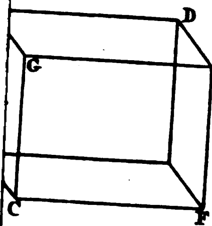


Fig. 6.



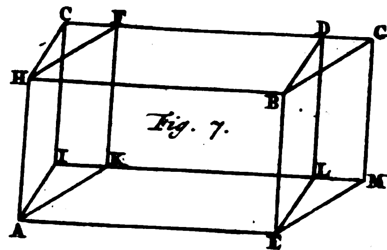


Fig. 7.

ſunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſim, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 26. PROPOS. 31. xxxi. xxxij.

Solida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

SUper æquales baſes AB, CD, in eadem altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda eſſe æqualia inter ſe. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; & inſiſtentes CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares. Quo poſito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter ſe æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, ſitque KR, æqualis ipſi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenſo æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod ad altitudinem perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia; Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. hujus lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. hujus lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. Quare cum tria plana, KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia, tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, *b* tam autem illa, quam hæc æqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppoſitis.

TAB. XXXI. fig. 2.

b 24. unde.

Erunt, per defin. 10. hujus lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se æqualia.

Conveniant rectæ DK, TS, productæ in d, & IQ, XY, in e; compleaturque parallelepipedum QdgV, Item HI, bV, protractæ conveniant in a; & OD gR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRa. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, QdgV, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, dX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kd, RT, Rg, QY, Qe, VX, Vb, collo-

c 29. und. cantur in eisdem rectis dT, eX, c ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum QdgV.

d 35. primi d Quoniam vero parallelogramma KT, Kg, æqualia sunt inter se; & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kg, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale; cum bases LG, CD, ponantur æquales.

e 7. quint. e Quare erit, ut CD, ad DR, ita Kg, ad DR:

f 25. und. f Ut autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KIaR; cum parallelepipedum CHaR, secetur plano IK, planis oppositis CH, aR, parallelo. Et eadem ratione ut Kg, ad DR, ita est solidum QdgV, ad solidum IKRa; cum & parallelepipedum Idga, secetur

g 9. quint. plano KV, oppositis planis Da, db, parallelo. g Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, QdgV, cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRa, nimirum eandem, quam habent bases æquales CD, Kg, ad eandem basin DR. Quare cum parallelepipedum QdgV, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG; æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum.

TAB. XXXI. fig. 3. Sint jam neque insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB, neque CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares: h Et à pun-

h 11. und. ctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculares;

lares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis, CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qa. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Ya, aZ, ZX, ut fiant parallelepipeda ETVF, HZaI, quæ cum sint ejusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, ut ostensum est. *i* Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZaI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si unius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

i 29. vel 30. und.

SCHOLIUM.

Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

Si enim unum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine p fient æqualia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur æquale alteri; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

p 31. und.

Quod si in eadem sint altitudine, & basis unius credatur major base alterius, si ab ea abscindatur basis æqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum ejusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse æqualem. Quod est absurdum.

xxxiij. THEOR. 27. PROPOS. 32.

Solida parallelepipeda ſub eadem altitudine, inter ſe ſunt, ut baſes.

TAB. XXXI. fig. 4. Sint duo parallelepipeda ABCD, EFGH, ejuſdem altitudinis ſuper baſes AB, EF. Dico eſſe ſolidum ab ſolidum, ut eſt baſis ad baſin. a 45. primi a Super rectam enim EK, conſtruatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui ſit æqualis angulo ENF. Conſtituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum unum FI, ut in 45. propoſ. lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum unum parallelepipedum a 31. und. IFLH; a erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cum habeant æquales baſes, per conſtructionem AB, IK, & eandem altitudinem, ex b 7. quint. hypotheſi. b Quare erit ut ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, ita ſolidum ABCD, ad idem c 25. und. ſolidum EFGH: c Eſt autem ſolidum IKLM, ad ſolidum EFGH, ut baſis IK, hoc eſt, illi æqualis baſis AB, ad baſin EF. Igitur & ſolidum ABCD, erit ad ſolidum EFGH, ut baſis AB, ad baſin EF. Solida ergo parallelepipeda ſub eadem altitudine inter ſe ſunt, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

xxxvi. THEOR. 28. PROPOS. 33.

Similia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

TAB. XXXI. fig. 5. Sint ſimilia parallelepipeda ABCD, FEGH, ſuper baſes ſimiles AB, EF, in quibus latera homologa ſint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, ad parallelepipedum EFGH, eſſe

esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR; Item DI, ad M, & fit IM, æqualis ipsi HK, vel GO; Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi KF; vel GS. Deinde completis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia sunt lateribus GR, GO; & anguli contenti æquales, cum angulus LIM, sit æqualis angulo AID, *a* qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogramma IX, GF, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt, & æqualia LN, RS; item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt, & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: *b* Sunt autem tria cujusque similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt & similia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. hujus lib. Rursus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum ABCD, EFGH, est ut AI, ad EK, hoc est, ad IL, ita DI, ad HK, hoc est, ad IM; & BI, ad FK, hoc est, ad IN. *c* Ut autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL; Et ut DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & ut BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit ut AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. *d* Sed ut AD, basis ad DL, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & ut basis DL, ad basin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; & ut basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, ut parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum

a 15. primi
b 24. und.
c 1. sext.
d 32. und.

X 5 LMBP,

LMBP, & parallepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoque proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad secundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. *e* Ut autem ADCB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basin DL; *f* Et ut AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione laterum homologorum. Quod erat demonstrandum.

e 32. und.
f 1. sext.

COROLLARIUM.

Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continuæ proportionales, ut est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundum. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, ut demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex defin. 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

xxxiv. xxxv.

THEOR. 29. PROPOS. 34.

Æqualium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; illa sunt æqualia.

TAB. XXXI. fig. 6.

Sint æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, super bases AD, EH. Dico bases AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, esse reciprocas, hoc est, esse ut AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitudinem solidi ADCB. Sint enim primum insistentes lineæ AI,

AI, EK, perpendiculares ad bases AD, EH, ita ut AI, EK, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propos. 31. hujus lib. ostendimus. Quare erit, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.

Quod si altitudines AI, EK, inæquales fuerint; sit EK, major, ex qua abscindatur EL, ipsi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH, per scholium propos. 15. hujus lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida ADCB, EHGF; a erit ut ADCB, ad solidum EHML, ita EHGF, ad idem solidum EHML: b Ut autem solidum ADCB, ad solidum EHML, ita est basis AD, ad basin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL, ut solidum EHGF, ad solidum EHML, ita est eadem ratione basis KN, ad basin LN, cum hac ratione solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit ut basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: c Sed ut KN, ad LN, ita est recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ sunt bases, & altitudines.

TAB. XXXI. fig. 7.

a 7. quint.

b 32. und.

c 1. sext.

Sint jam bases & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, ut altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. d Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt.

TAB. XXXI. fig. 6.

d 31. und.

Quod si altitudo EK, major fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur

TAB. XXXI. fig. 7.

ex

ex hypothesi est, ut basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad
e 32. und. EL, ipsi AI, æqualem; e Ut autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales po-
f 1. sext. nantur. f Et ut EK, ad EL, ita est, KN, ad
g 32. und. LN; g Ut autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum EHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit ut solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum
h 9. quint. EHGF, ad idem solidum EHML; h ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

TAB. XXXII. fig. 1. Sed proponantur jam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum insistentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, non sint perpendiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planum basis
n 11. und. AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; n Item à punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares NX, HY, Qa, GZ: connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Za, XZ, Ya: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rursus, ut basis AB, ad basin EF, ita esse altitudinem XN, ad altitudinem RI. Cum enim æqualia sint solida ABCD, EFGH, ex hypothesi,
i 29. vel 30. und. sit autem ABCD, æquale solido RVCD, i quod habeant eandem basin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale solido XaGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XaGH, æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH; erit, ut jam demonstratum est, ut basis CD, ad basin
k 34. und. GH, hoc est, ut basis AB, ad basin EF, k ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.

Sint jam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia, Constructa enim figura, ut prius; Cum sit ut basis AB, ad basin EF,

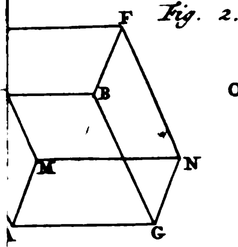
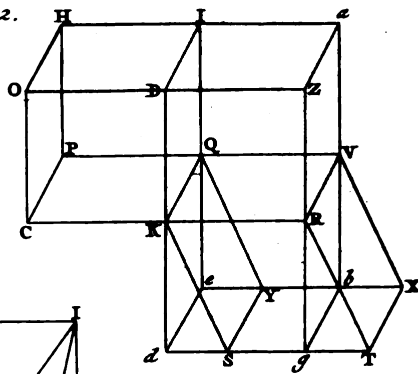
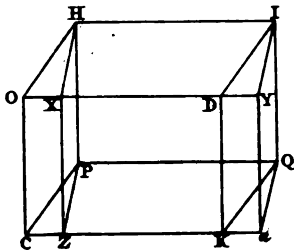
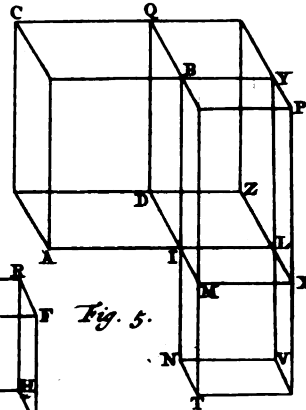
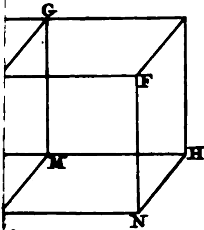

F
B
M
N
G

Fig. 2.


H
I
a
O
D
Z
P
Q
V
C
K
R
e
Y
b
X
d
S
g
T


H
I
O
X
D
Y
P
Q
C
Z
K
a


C
Q
B
Y
P
D
Z
A
I
L
M
X
N
V
T


G
F
M
H
N

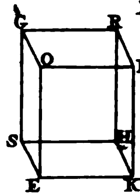
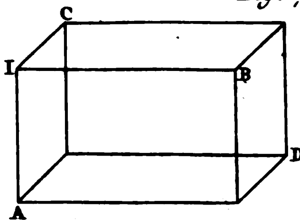
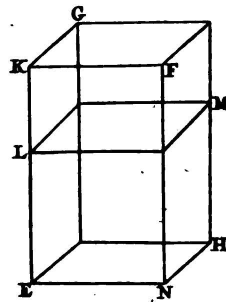

G
R
O
F
S
H
E
K


Fig. 5.


F
H

Fig. 7.


C
I
B
D
A


G
K
F
M
L
H
E
N

Præterea, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia,
p 33. und. *constituentur duo parallelepipeda similia, p quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia,*
q 15. quint. *q cum eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.*

Denique si dictis duobus prismatis æqualibus adjungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia earundem
r 34. und *altitudinum cum prismatis. r Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eædem sint, vel certe triangula earum*
s 15. quint. *dimidia s eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ.*

xxxvii. THEOR. 30. PROPOS. 35.

Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendunt.

TAB. XXXII. fig. 2. Sint duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana sublimes rectæ lineæ, AG, DH, ita ut angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, sit æqualis: à sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittuntur

cantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, existunt, perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K; & adjungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, esse æquales inter se; Nam si AG, DH, sunt inæquales auferatur à majori AG, ipsi DH, æqualis linea AL, & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipsi GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ sunt GI, LM, & est GI, ad planum anguli BAC, recta; *a* erit quoque LM, ad idem planum recta: ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF, & connectantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta est ad planum anguli BAC, ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. 3. hujus lib. *b* Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML; *c* Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CM, ML: *d* At quadratis rectarum CM, ML, æquale est quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus sit per defin. 3. hujus lib. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CL; *e* Ac proinde angulus ACL, rectus erit. *f* Rursus quia quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AM, ML: *g* Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML: *h* At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit rectus ex defin. 3. hujus lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; *i* proptereaque angulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales sunt angulis DEH,

a 8. und.
b 47. primi
c 47. primi
d 47. primi
e 48. primi
f 47. primi
g 47. primi
h 47. primi
i 48. primi

DEH, HDE, trianguli DEH; suntque latera
k 26. primi AL, DH, æqualia; k Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cum latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æ-
l 4. primi quales, ex hypothesi; l erunt & bases BC, EF, inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales; cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF,
m 26. primi sint ostensa æqualia; m erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli
n 4. primi ACM, DFK, sunt recti; n erunt & bases AM, DK, inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum qua-
o 47. primi drata æqualia. o Quia vero quadratum rectæ BL, æquale est quadratis rectarum BM, ML, & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti sint, ex defin. 3. hujus lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia sunt, quod rectæ BM, EK, ostensæ sint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & basis LM, basi HK, æqua-
p 8. primi lis; p erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.

COROL.

COROLLARIUM.

Itaque, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique. Erunt à punctis extremis linearum sublimium ad planum angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & sublimes æquales AL, DH, constituunt angulos æquales LAB, HDE. Item LAC, HDF: demonstratum fuit, demissas perpendiculares LM, HK, esse æquales.

THEOR. 31. PROPOS. 36. xxxviij.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

SInt continue proportionales rectæ A, B, C. Constituaturque angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunque DEF, DEG, FEG, ita ut recta DE, ipsi A; & EF, ipsi B; & EG, ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. *a* Deinde ad rectam IK, ejusque punctum K, fiat solidus angulus K, æqualis solido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales sint tribus DEF, DEG, FEG, ita ut rectæ IK, KL, KM, æquales sint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN, quod contineri dicitur sub linea B, seu ex ipsa describi. Dico solidum DH, æquale esse solido IN. Cum enim sit ut DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C,

TAB. XXXII. fig. 3.

a 26. und.

sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales. *b* Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorum verticibus insistunt sublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, utrumque utrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ, nimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales, per coroll. propos. præcedentis. *c* Quare parallelepipeda DH, IN; (Cum habeant bases DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines,) inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

b 14. *sext.*

c 31. *und.*

xxxix. THEOR. 32. PROPOS. 37.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

TAB. XXXII. fig. 4.

Sint quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; ut quidem A, ad B, ita C, ad D; constituanturque super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta; item super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, sive hæc sint illis similia, sive non. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia; Ut quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inveniantur enim per scholium propos. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continue proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor

quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, ut A, ad F, ita C, ad H. Ut autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B, & ut C, ad H, ita solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. hujus lib. Igitur erit ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

Sint jam è contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales: *a* Tribus enim rectis A, B, a 12. sexti.
C, inveniatur quarta proportionalis I, *b* super b 27. und.
quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, ut jam est ostensum, ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Ut autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit ut solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. *c* Atque idcirco c 9. quint.
æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. hujus lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, ut recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, ut recta A, ad B. Quare erit ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

Brevius tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum ut recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. *d* Cum enim sit d 33. und.
proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis

rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse ut solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, ut rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. *e* Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

e 33. und.

xxx. THEOR. 33. PROPOS. 38.

Si planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in uno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

TAB. XXXII. fig. 5.

PLanum enim AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; & ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, *a* & ab F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD, erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. hujus lib. atque adeo & ad rectam GE, per 3. defin. hujus lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG,

a 12. primi

EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdum, *b* cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. b 17. primi

THEOR. 34. PROPOS. 39. XXXIX.

Si solidi parallelepipedi eorum, quæ ex adverso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

Sint parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH, *a* & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS,) *b* & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: *c* Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. *d* Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales: *e* Ac propterea AS, CS, unam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & unam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia utraque AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma

TAB. XXXII. fig. 6.

a 34. primi
b 29. primi
c 4. primi
d 13. primi
e 14. primi

f 9. und. gramma AF, FC, *f* ipsæ quoque inter se paralle-
g 33. primi læ erunt, & æquales. *g* Quare & rectæ AC, BD, earum extrema conjungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt; *h* erunt rectæ AB, RS, in eodem cum
h 7. und.
ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in pun-
i 29. & cto videlicet T. *i* Cum autem duo anguli AST,
15. primi. ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS,
k 26. primi lateri BR: *k* Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex adverso, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

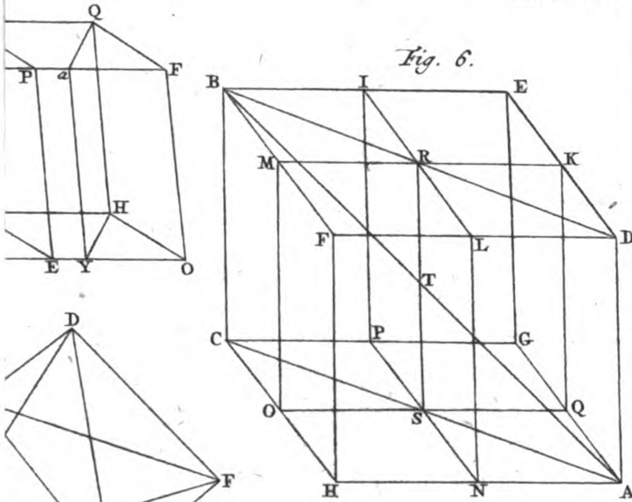
Hinc efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in uno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam dividunt, ut hic demonstratum est, rectam RS.

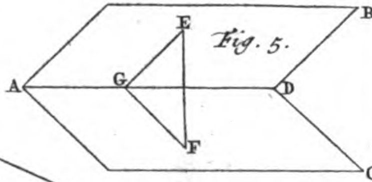
xxxi. THEOR. 35. PROPOS. 40.

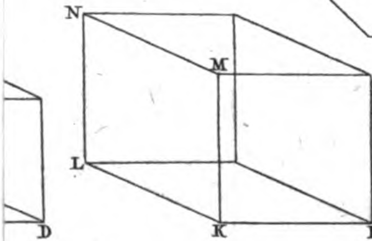
Si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

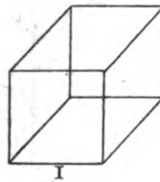
TAB. XXXIII. fig. 1. Sint duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturque parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, con-

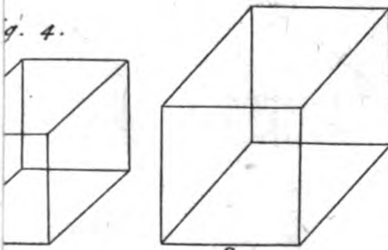
TAB. XXXII.

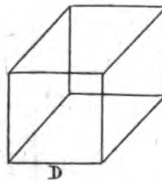

Fig. 6.
Q
P
a
F
H
E
Y
O
D
F
K
B
I
E
M
R
K
F
L
D
T
C
P
G
O
S
Q
H
N
A


Fig. 5.
E
B
A
G
D
F
C


N
M
L
D
K
I


I


g. 4.
C
G


D
H

constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, ejusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. hujus lib. *a* Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, ejusdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. *b* Quare parallelepipeda AN, GQ, ejusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (*c* nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum adversorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 34. primi
b 31. und.
c 28. und.





EUCLIDIS ELEMENTUM DUODECIMUM.

Et solidorum secundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Quæ in circulis polygona similia; inter se sunt, ut à diametris quadrata.

TAB. XXXIII. fig. 2. SInt duo polygona similia ABCDE, FGHIK, descripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, ut quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est, ut AB, ad BC, ita FG, ad
a 6.sext. GH; *a* erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habe-
b 21.tertii. ant latera proportionalia: *b* Est autem angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM,
c 31.tertii. æquales sint, *c* nempe recti in semicirculis existen-
d 32.primi tes; *d* erunt & reliqui BAL, GFM, æquales.
e 4.sext. *e* Quare erit ut AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, ut AL, ad FM, ita AB, ad

FG.

FG. *f* Igitur est ut quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, super AB, ad polygonum FGHIK, super FG; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, ut à diametris quadrata. Quod erat demonstrandum. f 22. sext.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Circuli inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SInt duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel major circulo EFGH. Si enim esset æqualis, *a* haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita ut circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, ut ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, majus erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adjunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi EF, ut ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque rectis HE, GF, productis in T, & V. *b* Quia ergo triangulum ELF,

TAB. XXXIII. fig. 2.

a 7. quint.

b 41. primi

ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; majus erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula majora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul majora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ majora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si à circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula ELF, FMG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulum EFGH, & magnitudinem I, uti ex subjecto lemmate constat. Sint jam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ major est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, majus reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D; & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales divisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam junctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, ut patet.
d 1. duod. dQuoniam igitur est polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, hoc est, per hypothesim, ut circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus

erit

erit circulo ABCD. *e* Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostensum autem est & majus. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH. *e 14. quint.*

Quamquam autem in figura confertur major circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quam major circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum majoris diametri AC; Ita ut generaliter & universe demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo mino-norem: sive prior circulus major sit posteriore, sive minor.

Sit deinde magnitudo I, major circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & convertendo I, ad circulum ABCD, ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur ut I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nempe ad K. Et quia I, major ponitur circulo EFGH, *f* major quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit ut quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam in priori parte generaliter, non posse esse ut quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: sive prior circulus major sit posteriore, sive minor. Quamvis autem circulus ABCD, major est, & EFGH, minor: eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem *f 14. quint.*

circulo

circulo ABCD, majorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem, quod falsum esse jam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita ut generaliter & universe quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicujus circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo majorem, sive prior circulus major sit posteriore, sive minor. Non ergo major est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa, æqualis igitur est. Quare cum ponatur, ut quadratum diametri AG, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad I;
g 7. quint. g sit autem ut circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque ut quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, sive circulus ABCD, circulo EFGH, major sit, sive minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc fit, ita esse circulum ad circulum, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, ut quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis si à majore auferatur majus quam dimidium; & de eo, quod reliquum est, rursus detrahatur majus quam

quam dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quadam magnitudo, qua minor erit proposita minore magnitudine.

Proposita sint dua magnitudines inaquales AB, & C, quarum AB, sit major. Dico si ex AB, auferatur majus quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursum majus quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, qua minor sit quam C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, major sit quam AB, ita ut DE, sit multiplex ipsius C, proxime major quam AB. Divisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, aquales, detrahatur ex AB, majus quam dimidium AH, & ex reliqua HB, majus quam dimidium HI; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine aquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo jam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsa DF, FG, GE. Quia igitur DE, major est quam AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium; si DE, ipsius C, sit duplex; ex AB, vero majus quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, majus. (Cum enim DE, major sit quam AB; si ex DE, dimidium auferetur, nec non & ex AB, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, majus reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex AB, majus quam dimidium; erit reliquum ex DE, majus reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, major est quam HB, auferturque ex FE, dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, si FE, major sit quam duplex ipsius C, at ex HB, majus quam dimidium HI, erit eodem modo reliquum GE, majus reliquo IB: TAB. XXXIII. fig. 4.

atque

atque ità procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hic est GE, majorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, major quam IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à majori auferatur majus, &c. Quod erat demonstrandum.

Idem demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, majus reliquo HB, nec non & reliquum GE, majus reliquo IB; cum ex majori DE, ablatum sit DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Omnis pyramis triangularem habens basim, dividitur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis.

TAB. XXXIII. fig. 5, 6. Sit pyramis, cujus basis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia ejus latera bifariam in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HG, HE, EI, IF. Divisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, vertices H, D; nec non in duo solida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita EHG, BIF; hujus vero basis est triangulum CFG, cui opponitur

nitur triangulum KIH, habentque hæc prismata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, ut constat, si recte concipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, nec non ejus triangula circumjacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & majora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter, *a* erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC, & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC. *b* Sunt autem & rectæ FG, HI, cum parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, sunt parallelæ; *c* erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. *d* Proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH, pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ, *e* erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. *f* Quare latera trianguli HIK, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per

a 2. sext.
b 9. und.
c 10. und.
d 4. sext.
e 10. und.
f 4. sext.

per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, ut g 21. sext. ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. *g* ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum similia sint ostensa triangulo ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cum similia sint ostensa triangulo ABC; & super rectas posita AE, HI, h 34. primi *h* quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erunt & similia triangula EHG, IDK, cum sint ostensa similia triangulo i 34. primi BDC, & habeant rectas HE, DI, *i* quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib. 11. quandoquidem omnia triangula unius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, ut demonstratum est.

k 34. primi Rursus, *k* quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea l 15. und. & similia: *l* Sunt autem & parallela; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ sint rectis BI, IF, per quas planum *BIF*, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, *BIF*, ex adverso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma est, ex defin. Eodem modo prisma ostendetur solidum m 34. primi CFGHIK. *m* Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inn 15. und. ter se, ac propterea similia: *n* Sunt autem & parallela, quod rectæ CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planum KIH,

KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex adverso æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam vero prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt ejusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK, & parallelogrammum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis hujus, per scholium propos. 41. lib. 1. *o* Ipsa inter se æqualia erunt. o 40. und.

Denique quia prisma EBFGHI, majus est pyramide EBFI, totum parte; Est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, nec non pyramidi HIKD, ut perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Majora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero à dimidio ejusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, major dimidium ejus superat, minor vero à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iv.

Si fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idque semper fiat; erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in una pyramide, prismata, ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

Sint super bases triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, ejusdem altitudinis, T. XXX. fig.

Z

nis, quarum latera bifariam dividantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita ut pyramis utraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV; ut vult propositio præcedens: eodemque modo intelligantur esse divisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH, & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, ut est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit ut BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod utraque linea divisa est bifariam, sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. pro-
a 22. sext. pos. 4. lib. 6. *a* Erit quoque ut triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, ut ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ut mox ostendemus, atque ideo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et ut unum prisma, videlicet IBKLMN, ad
b 12. quint. unum prisma PFQRST, *b* ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, ut sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta divisione. Sed ut illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQG, quæ his est

est æqualis, & similis, ut in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erunt quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cujuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cujuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, ut prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum sint, ut duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, c ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum. c 12. quint.

LEMMA.

Quod autem sit LKC, ad QRG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad bases ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, d *secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter, secatur autem DC, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur à plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales: Ac* d 17. und.

 proinde

proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, ut bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstravimus.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases, inter se sunt, ut bases.

TAB. XXXIII. fig. 7. SInt pyramides ejusdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum bases triangula ABC, EFG. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis, ad basin. Si enim non ita sit, ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; quod vel minus erit, vel majus pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Dividatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, juxta propos. 3. hujus lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV; *a* quæ majora sunt dimidio pyramidis EFGH: Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidum X. per lemma propos. 2. hujus lib. Sit ergo jam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, majora solido X. Dividatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide

a 3. duod.

de EFGH. *c* Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, ut basis ABC, ad basin EFG, hoc est, ut pyramis ABCD, ad solidum X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; *d* erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & majora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH. c 4. *duod.* d 14. *quint.*

Sit deinde solidum X, pyramide EFGH, majus. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, ut basis ABC, ad basin EFG: Erit convertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, ut basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, ut solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, majus ponitur pyramide EFGH, *e* erit & pyramis ABCD, major solido Y. Quare erit, ut basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est jam, non posse esse, ut est, basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo majus est solidum X, pyramide EFGH, sed neque minus, est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; *f* sit autem pyramis ABCD, ad solidum X, ut ad pyramidem EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque ut basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum. e 14. *quint.* f 9. *quint.*

COROLLARIUM.

Hinc fit, pyramides ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, ut bases.

TAB. XXXIII. fig. 8. SInt pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum bases polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resolutis enim basibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares divisa. a 5. duod. *a* Quia vero est, ut basis ABC, ad basin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo ut basis ABCD, ad basin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: b 5. duod. *b* Sed rursus est ut basis ACD, ad basin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo ut basis ABCD, ad basin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit ut basis ABCDE, ad basin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit ut basis GHIKL, ad basim GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & convertendo ut basis GKL, ad basin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. c 5. duod. *c* Rursus quoniam est, ut basis ADE, ad basin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eisdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, ut manifestum est ex demonstratione. Quare ex æquo, erit ut basis ABCDE, ad basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIUM.

Quamvis hujus propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus ejusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygonæ latera habent multitudine æqualia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus ejusdem altitudinis quarum unius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim duæ pyramides ejusdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, hujus vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut est basis ad basin. Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales divisa. d *Quoniam vero est, ut basis ABC, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, ut basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* e *Erit ut basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rursus quia est, ut basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, ut modo est ostensum:* f *& ut basis ADE, quinta quantitas ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem;* g *Erit etiam basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona.*

TAB. XXXIII. fig. 9.

d 5. duod.

e 24. quint.

f 5. duod.

g 24. quint.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Omne prisma triangularem habens basim,

dividitur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

TAB. XXXIV. fig. 1. SIt prisma ABCDEF, cujus duo triangula opposita, æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF, FD, in ADEF. a Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia sunt; b estque ut basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demissam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, super æquales bases ADF, EFD, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planum ADEF, demissa. Est autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum prisma componentes, ut perspicuum est, æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCDEF; in tres pyramides æquales est divisum. Quo circa omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

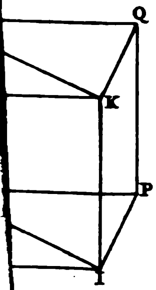
a 34. primi
b 5. duod.

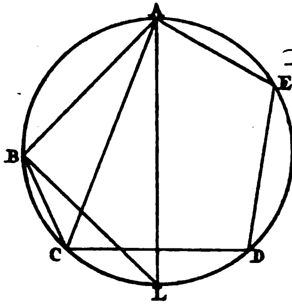
COROLLARIUM.

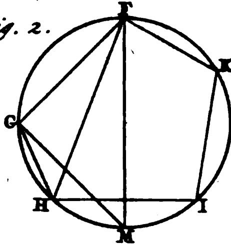
Hinc colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Sive prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

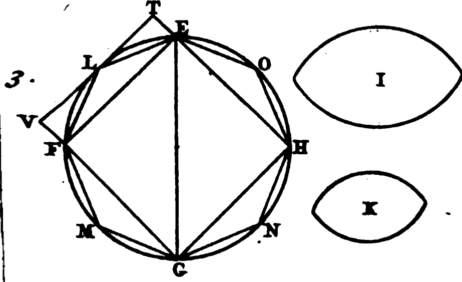
Sit

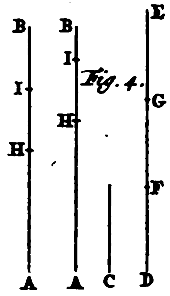
TAB. XXXIII.

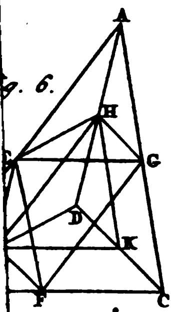

Q
K
P
I

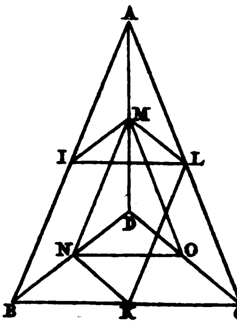

A
E
B
C
D
L

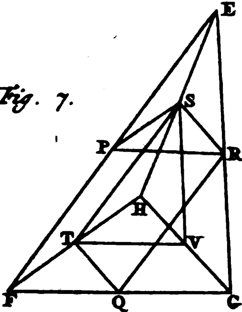

Fig. 2.
F
K
G
H
I
M

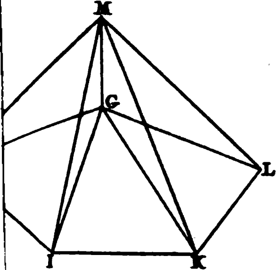

3.
T
E
L
O
V
F
H
M
N
G
I
K

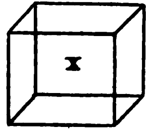

Fig. 4.
B
I
H
A
B
I
H
A
C
E
G
F
D

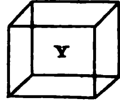

g. 6.
A
H
G
D
K
F
C

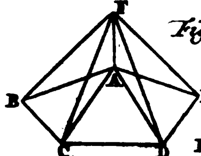

A
M
I
L
D
N
O
B
K
C

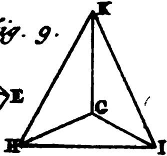

Fig. 7.
E
S
P
R
H
T
V
F
Q
G


M
G
L
I
K


X


Y


F
A
B
E


Fig. 9.
K
G
H
I

Sit enim primum pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta DF, erit prisma divisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF, *c* ut demonstratum est; Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hæc illi sit æqualis, immo eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constitutæ, ex coroll. propos. 5. hujus lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum.

TAB. XXXIV. fig. 2.

c 7. *duod.*

Sit deinde pyramis ABCDE, cujus basis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD, EHF, FGH, erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares divisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, ut demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD. Item pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit ut pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB; *d* Ac propterea ut una pyramis ad suum prisma; ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & super eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. propos. 5. hujus lib. Eademque ratione æquales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & super eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine & super eandem basim ABCD, constituta, per coroll. propos. 5. hujus lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem

TAB. XXXIV. fig. 3.

d 12. *quint.*

prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, candemque altitudinem.

Quod si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam divisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Unde singulæ pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

SCHOLIUM.

Sub eadem altitudine existentia prismata, quascunque habeant bases, inter se sunt, ut bases.

Quamvis enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ: nec non de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen id ipsum demonstrabimus universe de omnibus prismatis, quorum duo plana adversa, sive bases, sunt polygona, quamvis plura latera, seu anguli in unius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata ejusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum TAB. XXXIV. fig. 4. *bases sint figuræ multilateræ. Dico ut est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis utriusque basis ad unum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases; Ac proinde per coroll. prædictum hujus propos. quælibet pyramis tertia pars erit sui* a 15. quint. *prismatis. a Quam ob rem erit, ut pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, ut basis ad basin, ut ostensum est propos. 6. ejusque scholio. Igitur erit quoque ut basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.*

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

Similes pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SInt pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita ut bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula unius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ convenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedum BM, ejusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi BM, sint parallela, ut facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, estque ut AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, similia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH, sint æquales, sitque ut AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & ut DB, ad BC, ita HF, ad FG: erunt & parallelogramma BL, BK, parallelogrammis FP, FO, similia. *a* Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, *b* sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, *c* prismata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem

TAB. XXXIV. fig. 5.

a 24. und.

b 24. und.

c 15. quint.

dem

d 11. quint. dem, quam prismata dicta, earum tripla; d habebunt quoque pyramides eandem proportionem, e 33. und. quam parallelepipeda. e Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

Sint pyramides similes, quarum bases rectilinea similia TAB. XXXIV. fig. 6. plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC, LH, LI, f 20. sext. f divisæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit ut FE, ad EA, ita ML, ad LG: Ut autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est ut EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et ut BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex æquo, ut EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum sit, ut FE, ad EB, ita ML, ad LH; & ut EB, ad BF, ita LH, ad HM, erit etiam g 5. sext. ex æquo, ut FE, ad FB, ita ML, ad MH. g Quare æquiangula, atque adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; h 8. duod. Item CDEF, IKLM. h Quapropter, ut demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM,

GHLM, LHIM, IKLM, singulæ ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant unam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, unam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; *i* Atque idcirco erit ut una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, *k* cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

i 12. quint.
k 8. duod.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

vij.

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales.

SInt æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse ut ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, ut in præcedenti propositione dictum est, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. *a* Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit ut basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: *b* Ut autem basis BI, ad basim FN, ita est trian-

TAB. XXXIV. fig. 7.
a 34. und.
b 15. quint.

triangulum ABC, ad triangulum EFG. Igitur erit quoque, ut basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

Sint jam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura,
c 15. quint. ut prius; c cum sit ut ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedo-
d 34. und. rum, & altitudines eorundem reciprocæ; d Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

viij. THEOR. 10. PROPOS. 10.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

TAB. XXXIV. fig. 8. HAbeant conus & cylindrus basin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel major, vel minor triplo coni. Sit primum major quam triplus coni, magnitudine E, ita ut cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturque super hæc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI,
ut

ut ad propof. 9. lib. 4. oftendimus; *a* eftque ut bafis ad bafin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum ejufdem altitudinis; Erit & parallelepipedum bafis ABCD, dimidium parallelepipedi bafis FGHI; Ac proinde parallelepipedum bafis ABCD, majus erit, quam dimidium cylindri, cujus bafis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adjunganturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipfi AB, ut ad propof. 27. lib. 3. oftendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & fuper AKB, ABOP, intelligantur prifmata fub altitudine coni & cylindri. *b* Quia ergo triangulum AKB, dimidium eft parallelogrammi ABOP; erit quoque prifma bafis AKB, dimidium prifmatis, feu parallelepipedi bafis ABOP: cum fit prifma, ad prifma ut bafis ad bafim, quemadmodum, ad propof. 7. hujus lib. demonftravimus; Ac propterea prifma bafis AKB, majus erit, quam dimidium fegmenti cylindri, cujus bafis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prifmata, quorum bafes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, majora, quam dimidia fegmentorum cylindri, quorum bafes circuli fegmenta. Omnia igitur hæc prifmata fimul majora funt, quam dimidia omnium fegmentorum cylindri fimul. Quod fi rurfus peripheriæ AK, KB, &c. fecentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ, conftituentur eodem modo prifmata ejufdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ majora erunt fimul, quam dimidia omnium fegmentorum cylindri fimul, quorum bafes circuli fegmenta, & fic deinceps. Quoniam vero fi à cylindro, cujus bafis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum bafis ABCD; & à reliquis fegmentis plus quam dimidium, nimirum prifmata bafium AKB, BLC, &c. atque in hunc modum

a 32. und.

b 41. primi

femper

ſemper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus cylindri ſupra triplum coni, per lemma propoſ. 2. hujus lib. Sint jam ſegmenta cylindri relicta baſium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, ſimul; Si ex cylindro auferantur ſegmenta dicta, & ex triplo coni una cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ major eſt dictis cylindri ſegmentis, erit reliquum priſma baſis multangulæ AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono, & cylindro, majus quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars priſmatis. Quare cum dicti priſmatis ſit tertia pars pyramis, cujus eadem cum ipſo baſis & altitudo, ex coroll. propoſ. 7. hujus lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod eſt abſurdum. Non igitur major eſt cylindrus triplo coni.

Sit deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus major quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus major quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita ut conus æqualis ſit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur rurſus in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturque ſuper hæc quadrata, pyramides ſub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FGHI, ut ad propoſ. 9. lib. 4. demonſtravimus, *d* eſtque ut baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem ejuſdem altitudinis; Erit quoque pyramis ſuper ABCD, dimidium pyramidis ſuper baſin FGHI; ac proinde pyramis ſuper baſin ABCD, major erit dimidio coni, cujus baſis circulus ABCD. Secentur peripheriæ AB, BC, CD, DA, biſariam in K, L, M, N, adjunganturque rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, ut ad propoſ. 27. lib. 3. demonſtravimus;

d 6. duod.

ſtravimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & ſuper AKB, ABOP, intelligantur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. *e* Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis ſuper baſin AKB, dimidium pyramidis ſuper baſin ABOP, *f* cum pyramides habeant proportionem eandem, quam baſes; ac proinde pyramis ſuper baſin AKB, major erit dimidio ſegmenti coni, cujus baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, majores, quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul majores ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, ſecentur bifariam, & adjungantur rectæ lineæ in eodem circulo, conſtituentur eodem modo pyramides ejuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ majores erunt ſimul, quam dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul, quorum baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam vero ſi à cono, cujus baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſin ABCD, quam majorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cujus baſis eſt circulus ABCD; & à reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum ſemper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri: per lemma propoſ. 2. hujus lib. Sint jam ſegmenta coni relicta baſium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahantur ſegmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri una cum magnitudine

e 41. primi

f 6. duod.

E, ipsa magnitudo E, quæ major est præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, major quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis majus erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, ut supra in coroll. propos. 7. hujus lib. à nobis est demonstratum, erit hujuscemodi prisma majus cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque major triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propter eaque conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, ut bases.

TAB. XXXIV. fig. 9. Sint sub eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico ut est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non credatur, sit ut basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel major erit, vel minor cono EFGHM. *a 7. quint.* Si enim esset æqualis, *a* haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conum, ut basis ad basin: quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita ut conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, dividanturque

que

que peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adjungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH, ejusdem altitudinis, & à reliquis segmentis auferantur pyramides ejusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, ut in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N, per lemma propos. 2. hujus lib. Sint ergo jam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis major est, erit reliqua pyramis, cujus basis polygonum EPFQGRHS, ejusdem altitudinis cum cono, major quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, ut in propos. 2. hujus lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propos. 2. hujus lib. est ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Ut autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N. c& ut polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem ejusdem altitudinis cum conis; Erit quoque ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ut conus ABCDK, ad N: Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, derit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Ostensa autem fuit & major. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

c 6. duod.

d 14. quint.

Sit secundo N, major cono EFGHM. Cum

igitur ponatur ut circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & convertendo ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, major ponitur cono EFGHM; major quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit ut circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono ABCDK. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt jam, non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono, ut eſt baſis illius coni ad baſin hujus coni. Non ergo major eſt N, magnitudo cono EFGHM. Sed neque minor eſt oſtenſa; Æqualis igitur eſt. Quapropter cum ponatur, ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; *e* Sit autem, ut conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM, erit quoque ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

e 7. quint.

f Quoniam autem, ut conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita eſt cylindrus ABCDK, (qui triplus eſt coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus eſt coni EFGHM.) Erit quoque ut baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo uſi ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

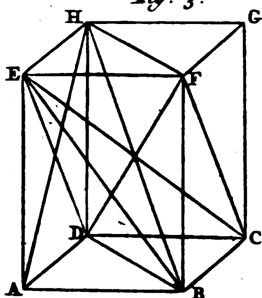
f 15. quint.

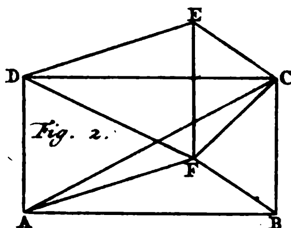
COROLLARIUM.

Hinc fit, conos & cylindros ejuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, eſſe inter ſe æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe una & eadem.

Item ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et æquales

TAB. XXXIV.





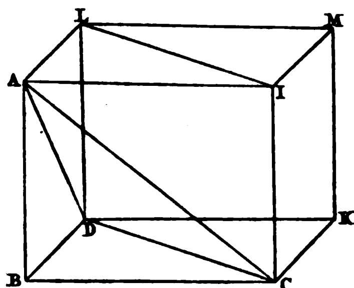


Fig. 5.

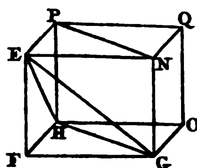
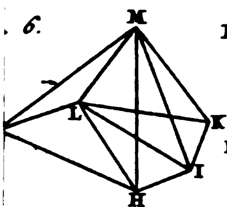
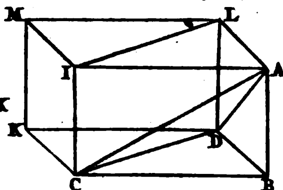
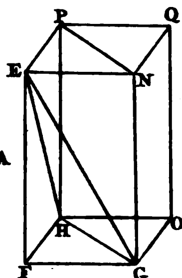
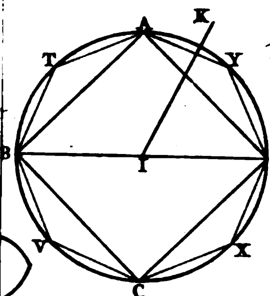


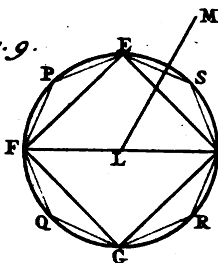
Fig. 7.

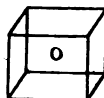


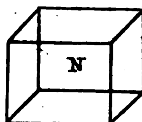












æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, & non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter; ac conversum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

SInt similes coni, & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, axes vero IK, LM, & diametri basium BD, FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel major cono EFGHM. Si enim esset æqualis, *a* haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, esset quoque triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita ut rursus pyramis EPFQGRHSM, major ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, ut habeantur duo triangula BKT, FMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, similes ponuntur; erit, ex 24. defin. lib. 11. ut diameter BD, ad diametrum FH. *b* ac propterea ut semidiameter BI, ad semidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutando ut BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propter eaque axes recti ad eorum bases; *c* Erunt triangula BIK, FLM, æquiangula; *d* Ac propterea ut KB, ad BI, ita erit MF, ad

TAB. XXXV. fig. 1.

a 7. quint.

b 15. quint.

c 6. sext.

d 4. sext.

ad FL. Ut autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcubus BT, FP, sint æquales, ut in scholio propos. 22. lib. 3. ostensum est; sitque ut BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, quam FL, LP; *e* erunt triangula BIT, FLP, similia.) Igitur ex æquo, ut KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rursus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia sunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis IK, rectus ponatur, ad circulum, ABCD, *f* erunt bases KB, KT, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cum utrobique sit proportio æqualitatis. *g* Quoniam vero ut KB, ad BT, ita KT, ad eandem BT; Item ut MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: Erat autem ut KB, ad BT, ita MF, ad FP: Erit quoque ut KT, ad BT; ita MP, ad FP; Et convertendo ut BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cum sit ut TK, ad KB, ita PM, ad MF, & ut KB, ad BT, ita MF, ad FP; Et ut BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti ostensum est; habebunt triangula BKT, FMP, latera proportionalia, *h* ideoque æquiangula erunt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cum sint *multitudine æqualia*, erunt dictæ pyramides *similes*, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8. hujus lib. Ut autem BT, ad FP, ita est, BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP; *i* Et ut BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit

e 6. sext.
f 4. primi
g 7. quint.
h 6. sext.
i 11. quint.

erit ut pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto; *k* erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem est & major. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM. k14.quint.

Sit deinde N, major cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, ut proxime ostendimus: Erit ut conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & convertendo ut N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum ex coroll. propos. 8. hujus lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc est, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoque N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur ut N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, major ponitur quam conus EFGHM, *l* erit quoque conus ABCDK, major quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono ABCDK, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Quod est absurdum. Ostensum est enim, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam ejus, quam habent basium diametri. Non ergo major est magnitudo N, cono EFGHM. Sed neque minor est ostensa. Æqualis igitur est; *m* ac proinde conus ABCDK, eandem habet proportionem ad conum EFGHM, & ad N. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata

l14.quint.

m7.quint.

proportione diametrorum BD, & FH; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicata.

Ex 5. quint. * Quoniam vero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo usi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

xi. THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si cylindrus plano secetur adversis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

TAB. XXXV. fig. 2. SEcetur cylindrus ABCD, plano GH, parallelo adversis planis AB, CD, quod quidem secet axem EF, in I. Dico ut est cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ita esse axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in utramque partem, una cum ejus axe & rectangulo EC, ad cujus revolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet: Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ EK, KL, æquales ipsi EI: Item quotcunque rectæ FM, MN, NO, æquales ipsi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad revolutionem rectanguli EC, describent circulos GH, PR, QS, Ta, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, compo-

ponentes totum cylindrum SQXY. Quoniam vero tam cylindri SP, PA, AH, super bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, Ta, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propos. 11. hujus lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) ut ex coroll. propos. 11. hujus lib. liquet. Si vero axis major est axe, cylindrus quoque cylindro major est; Et si minor, minor in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit per defin. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axem IF, secundam magnitudinem, ut cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur adversis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14. xi.

Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, ut altitudines.

Sint super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines, (Nam in conis & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE, MF: Dico, esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, ut est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur *TAB. XXXV. fig. 31*

tur

tur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, una cum ejus axe LE, & rectangulo AG; abſcindaturque axis EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, ut fiat cylindrus GHOP, ejuſdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. *a* cylindrus AG, ad ipſos eandem habebit proportionem. *b* Eſt autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, ut axis, ſeu altitudo LE, ad axem, ſeu altitudinem EN, hoc eſt, altitudinem MF, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, ut altitudo LE, ad altitudinem MF.

a 7. quint.
b 13. duod.

c Quia vero coni ABE, CDF, ſunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; *d* ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, ut altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, ut altitudines. Quod oſtendendum erat.

c 10. duod.
d 15. quint.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.

TAB. XXXV. fig. 4.

Sint æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE; axes altitudinesve LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe ut AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib. Quare erit ut baſis AB, ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad

ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.

Quod ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, major, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, ut in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, ut fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; *a* erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. *b* Eſt autem ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: *c* Item ut cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo una & eadem DE. Igitur erit quoque ut baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſint baſes & altitudines.

a 7. quint.
b 11. duod.
c 14. duod.

In conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, *d* cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare ut oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demonſtrari poteſt, quo uſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF, conſtituantur duo coni, ut in figura apparet.

d 10. duod.

Sed jam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit ut baſis AB, ad baſin, DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. hujus lib.

Quod

Quod si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, ut prius. Quia igitur ponitur, ut basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic æqualem MN. e 11. duod. *e* Est autem ut basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: f 14. duod. *f* Item ut altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales: erit ut cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus g 9. quint. DEIK, ad eundem cylindrum DO; *g* Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

At vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eædem sint bases, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, ut ostensum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest. eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

xiij. PROBL. 1. PROPOS. 16.

Duobus circulus circa idem centrum existentibus, in majori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

TAB. XXXV. fig. 5. Sint duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oporteatque in majori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cujus latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propos. 16. lib.

lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, major est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidium IK, & sic deinceps; relinquetur tandem minor arcus quam CG, per lemma propos. 2. hujus lib. Sit igitur jam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectam CK, esse unum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, dividatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrans AB, in totidem partes æquales dividatur, in quot divisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHC, in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, *b* quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt; *c* erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DE, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec unquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conveniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK, *d* ideoque æqualiter cum CK, à centro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in majori circulo, &c. Quod erat faciendum.

b 29. tertii.

c 29. primi

d 14. tertii.

COROLLARIUM.

Hinc est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro convenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra ipsum cadere.

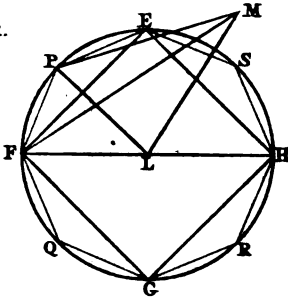
Hu-

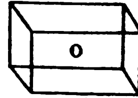
Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, convenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.

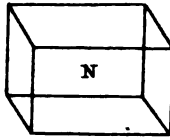
xiv. PROBL. 2. PROPOS. 17.

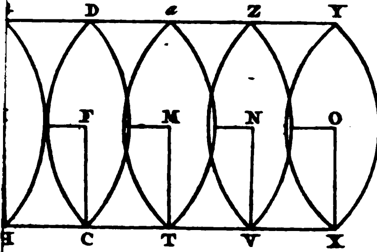
Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

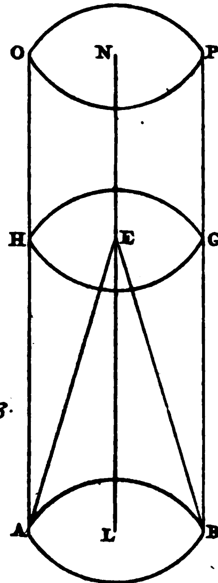
TAB. XXXVI. fig. 1. Sint duæ sphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in majori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumvolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt æquales, cum ducantur ex centro sphærarum, ad earum superficiem; erunt ipsæ sectiones circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD, sese in centro I, secantes ad angulos rectos, ut sint quadrantes AB, BC, a 16. duod. CD, DA, &c. a Deinde in majori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem ut facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gg, ad circumferentiam usque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tanget in G, ex coroll. b 1. quart. propos. 16. lib. 3. Et rectæ Gg, b applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Ae. Quia vero si arcui Cg, intelligatur subtendi recta, ut fiat tri- c 19. primi angulum GCg, c latus Cg, oppositum majori angulo,


E
M
P
S
F
L
H
Q
R
G


O


N


2.
D
a
Z
Y
F
M
N
O
H
C
T
V
X


O
N
P
H
E
G
A
L
B

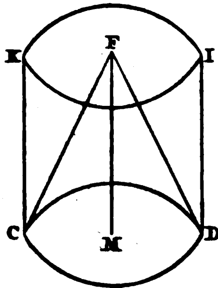
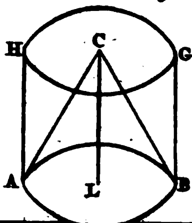
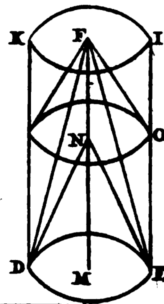

F
K
I
C
M
D

Fig. 3.

Fig. 4.


C
H
G
A
L
B


K
F
I
N
O
D
M
E

gulo, nempe recto, majus est latere Gg, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta Cg, major recta Ae; ac proinde arcus Cg, arcu Ae, major erit, ut constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus Cd, arcui Ae, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidium LK, & sic deinceps; relinquetur tandem arcus minor arcu Cd, seu arcu Ae, per lemma propos. 2. lib. hujus. Sit ergo jam arcus CK, minor; Eritque recta CK, subtensa minor quam recta Ae, hoc est, quam Gg, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, esse unum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cd, minorem arcu Cg, non tangat circulum EFGH, ut ex demonstratione præcedentis propos. patet; multo minus recta CK, subtendens arcum minorem arcu Cd, eundem circulum tanget. Rursus ducta diametro KN, *e* erigatur ex centro I, ad plana circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superficiei sphæræ majoris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, *f* quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientque communes sectiones, circulos, ut jam dictum est, quorum semicirculi sint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. *g* quadrantes erunt OC, OK; atque adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ majoris diametri, erunt quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot divisus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD; *h* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD, CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Conjunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY,

e 12. und.
f 18. und.
g schol. 27. tertii.
h 29. tertii.

i quæ

i 38. und. *i* quæ in communes sectiones AC, NK, cadent;
k 6. und. *k* eruntque inter se parallelæ.

Quoniam igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib.
l 27. tertii. 11. *l* & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt; (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem & latera PC, SK, rectis an-
m 26. primi. gulis opposita, æqualia; *m* Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales sint
n 33. primi & parallelæ; si connectatur recta XY, *n* æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter sese.
o 2. sext. *o* At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CX, KY, relinquentur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, ut IX,
p 9. und. ad XC, ita IY, ad YK.) *p* Erunt parallelæ quoque PS, CK, inter se, cum utraque parallela sit
q 7. und. ipsi XY, *q* ideoque eas conjungentes rectæ CP, KS; in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum CKSP, in uno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas; atque adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cum eidem CK, sint parallelæ, totumque quadrilaterum PSTQ, in uno esse plano. Eadem ratione in uno erit plano quadrilate-
r 2. und. rum QTVR. *r* Est autem & triangulum RVO, in uno plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, MO, OD, nec non in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, ut tota sphæra major repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sunt prædictis inter

qua-

quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis, inscriptum erit in sphæra majori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

Ducatur enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autem perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in scholio sequenti ostendemus. Quoniam igitur ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; s erit quadratum rectæ IC; quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia: Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoque & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad intervallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam vero, ut postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est; t erit quadratum rectæ CK, majus quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, majus erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

s 47. primi

t 12. secundi

Ducatur ex K, ad rectam AC, perpendicularis Ka. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI, & Aa, major sit, quam AI, erit AC, minor duplo ipsius Aa. Quam ob rem cum sit, u ut AC, ad Aa, ita rectangulum sub AC, aC, ad rectangulum sub Aa, aC, quod bases horum rectangulorum sint AC, Aa, & eadem altitudo aC; erit quoque rectangulum sub AC, aC, minus duplo rectanguli sub Aa, aC. x Est autem rectangulum sub AC, aC, æquale quadrato rectæ CK,

u 1. sexti

x 17. sexti

CK, & rectangulum ſub Aa, aC, æquale quadrato rectæ Ka; quod recta CK, inter AC, aC, ſit media proportionalis; & recta Ka, inter Aa, aC, ex coroll. propoſ. 8. lib 6. (ſi enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Ka. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, oſtenſum ſit majus eſſe duplo quadrati rectæ ZC, erit quadratum rectæ

y 47. primi Ka, majus quadrato rectæ ZC. yQuoniam vero quadratum rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Ia, aK; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Ia, aK. Si ergò ex his dematur quadratum majus, nempe rectæ aK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, majus quadrato reliquo rectæ Ia; ideoque recta IZ, major quam recta Ia. Quapropter cum punctum a, non tangat ſphæram minorem EFGH, quod per coroll. propoſ. præcedentis recta Ka, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans eandem ſphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint à ſphæra EFGH, quam punctum Z, ut mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH.

Sed & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem EFGH, ſi prius ducatur recta Ig, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta Gg:

z 19 primi zEſt autem CK, major quam ZC, quod angulus CZK, obtuſus ſit, ut mox demonſtrabitur; multo major erit Gg, quam ZC; Ac propterea quadratum rectæ Gg, majus quadrato rectæ ZC.

a 47. primi aQuia vero quadratum rectæ Ig, æquale eſt quadratis rectarum IG, Gg; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarnm IZ, ZC; ſunt autem quadrata rectarum Ig, IC, æqualium æqualia; erunt

erunt & quadrata rectarum IG, Gg, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gg, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, sit sphæræ minoris EFGH, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, ut prius, planum CKSP, sphæram EFGH, nequaquam continget.

Ducatur rursus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Ib, eritque b, centrum circuli circa PSTQ, descripti, ut demonstratum est; Connexis autem rectis bP, IP, cum angulus IbP, rectus sit, ex 3. defin. lib. 11. *b* erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Ib, bP. Quia vero & quadratum rectæ IC, (quod æquale est quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale est quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Ib, bP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia; Est autem quadratum rectæ ZC, majus quadrato rectæ bP, quod & linea ZC, major sit, quam linea bP, ut postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Ib, reliquo quadrato rectæ IZ, majus erit; ideoque & linea Ib, major quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum b, extra sphæram, EFGH, existet, quam punctum Z: proptereaque multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget sphæram minorem EFGH. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

b 47. *primi*

COROLLARIUM.

Ex iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quavis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile

 præ-

prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in una sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam ejus, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium, dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum; ut constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra majorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos; ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in una sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum, ut constat ex coroll. propos. 8. hujus lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum unius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque
c 15. quint. adeo diametrorum sphærarum, c cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

SCHOLIUM.

Quoniam vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, ut vera; quæ tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breviter à nobis erunt demonstranda.

TAB. XXXVI. fig. 2. *Primum itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, esse obtusum. Quod ut commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura prima est ut IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, similia sint.) Est autem IK, major, quam*
d 14. quint. *IY; d erit & KC, major quam YX. Cum igitur YX, æqualis sit ostensa ipsi SP; erit quoque KC, major quam SP Ac propterea in hac secunda figura, arcus CK, major erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib. 3.*

3. e*Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, sint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipsi KC, lineæ sint æquales demonstratæ; (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, ut ex constructione figuræ primæ constat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, majores; Atque idcirco quilibet arcus CK, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque à semicirculo superabitur; ac proinde multo magis segmentum SP, minus erit semicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est Ib cadere intra quadrilatera; nec non & perpendicularem ex I, ad triangulum OKV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus CK, quadrante major est; angulus CZK, obtusus erit, nempe recto major, cum angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, ut perspicuum est ex scholio propos. 27. lib. 3.* e 28 tertii.

Secundo demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius à centro I, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum b, in quadrilatero CKSP, & adjungantur rectæ Ib, Zb. Quoniam ergo angulus IZb, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. f Erit latus illi oppositum Ib, majus latere IZ, quod minori angulo IbZ, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum b, longius à centro I, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare. TAB. XXXVI. fig. 3. f 19. primi

Tertio, ac ultimo probandum est, rectam ZC, majorem esse recta bP. Quod ut aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, majorem esse recta QT. Describatur igitur pars primæ figuræ, ea videlicet, quæ continetur semidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Ql, Tm, g quæ in communes sectiones IC, IK, cadent, h eruntque inter sese parallelæ, ut de rectis PX, TAB. XXXVI. fig. 4. g 38. undec. h 6. undec.

 SY,

ST, dictum est. Quod si adjungatur recta lm; erunt QT, ml, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & æquales PS, XY. (i 2. sext.) *i Quia vero ml, ipsi CK, parallela est; quod latera IC, IK, proportionaliter sint secta in l, & m, veluti diximus de recta XY;* (k 30. primi) *k erunt quoque ml, XY. parallelæ. Quare erit ex coroll. propos. 4. lib. 6. ut IY, ad YX, ita Im, ad ml, est autem IY major quam Im.* (l 14. quint.) *l Igitur & YX, major erit quam ml; Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XY, major erit quam QT, quæ æqualis est ipsi ml.*

(TAB. XXXVI. fig. 5.) *Hoc ergo demonstrato, describantur ex centris Z, b, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egredianturque è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP, bP, bS, bT, bQ. Si igitur ZC, non credatur major, quam bP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus bS, bP, & basis KC, major est base PS;* (m 25. primi) *m erit angulus KZC, major angulo SbP: Eadem ratione major erit angulus SZP, angulo TbQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt æquales* (n 8. primi) *n erunt anguli KZS, CZP, angulis SbT, PbQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, majores erunt quatuor angulis ad b: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta ZC, rectæ bP.*

Sit deinde ZC, minor, quam bP. Et abscindantur bu, bq, br, bt, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturque rectæ uq, qr, rt, tu, (o 2. sext.) *o quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eo quod rectæ ex centris sectæ sunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit ut bS, ad SP, ita bq, ad qu. Cum ergo bS, major sit quam bq,* (p 14. quint.) *p erit & SP, major quam qu. Eademque ratione majores erunt ST, TQ, QP, rectis qr, rt, tu; Ac propterea cum PS, minor sit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt rectæ qu, qr, rt, tu, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectæ*

bu,

bn, bq, br, bt, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales; erunt anguli ad Z, majores angulis ad, q25.primi
b: Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi sunt quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quam bP: Sed neque æqualis est ostensa; Major igitur est. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xv.

Sphæræ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SInt duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphæram GHI, minorem, vel KLM, majorem, quam DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primum sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque sphæra GHI, concentrica sphæræ DEF. *a* Inscribatur in sphæra majori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem sphæram GHI; Atque huic simile polyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ ABC, ad sphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Est autem per coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Erit ut sphæra ABC, ad sphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum sphæra ABC, major sit polyedro ASBTCVXY, *b* erit & sphæra GHI, major polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.

TAB. XXXVI. fig. 6.

a 17. duod.

b 14. quint.

Habeat secundo sphæra ABC, ad sphæram

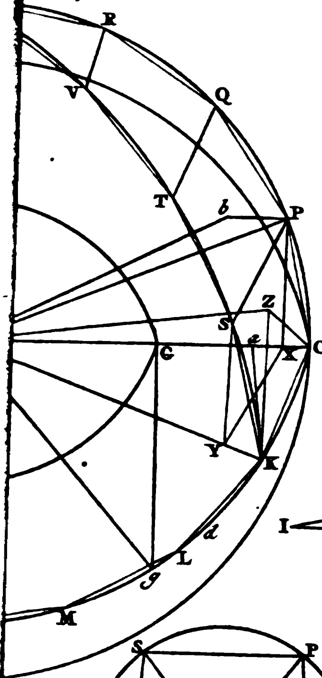
KLM, majorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit ut ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et convertendo, ut ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur ut ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Zab. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Zab, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, major ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoque ſphæra ABC, major quam ſphæra Zab. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Zab, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, majorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, ut demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

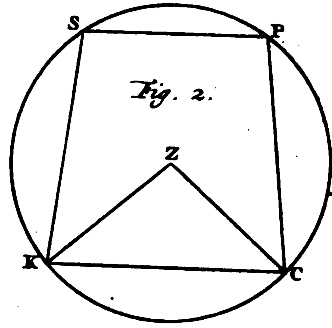
COROLLARIUM.

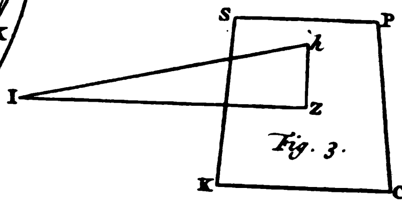
Hinc fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, ut polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, ut demonſtratum eſt.

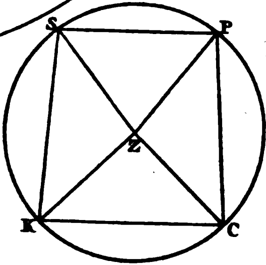
FINIS.

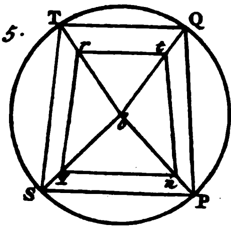
TAB. XXXVI.

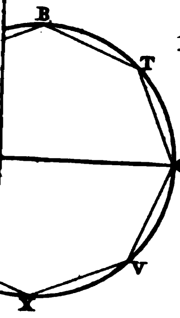

R
V
Q
T
b
P
Z
S
a
G
X
C
Y
K
d
L
g
M

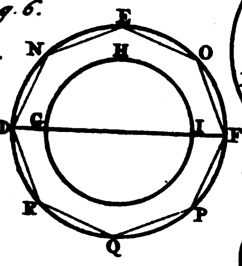

S
P
Fig. 2.
Z
K
C

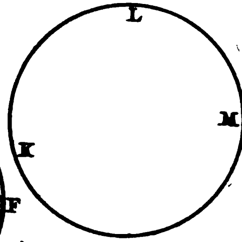

S
P
h
I
Z
Fig. 3.
K
C

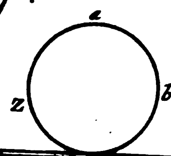

S
P
Z
K
C


Fig. 5.
T
Q
r
t
S
P


B
T
C
V
X


Fig. 6.
E
N
H
O
D
G
I
F
R
P
Q


L
M
K


a
b
Z

